ជំពូក-VI (Chapitre-VI)

<u>ការប្រមាណ ដេស៊ីមាល</u>

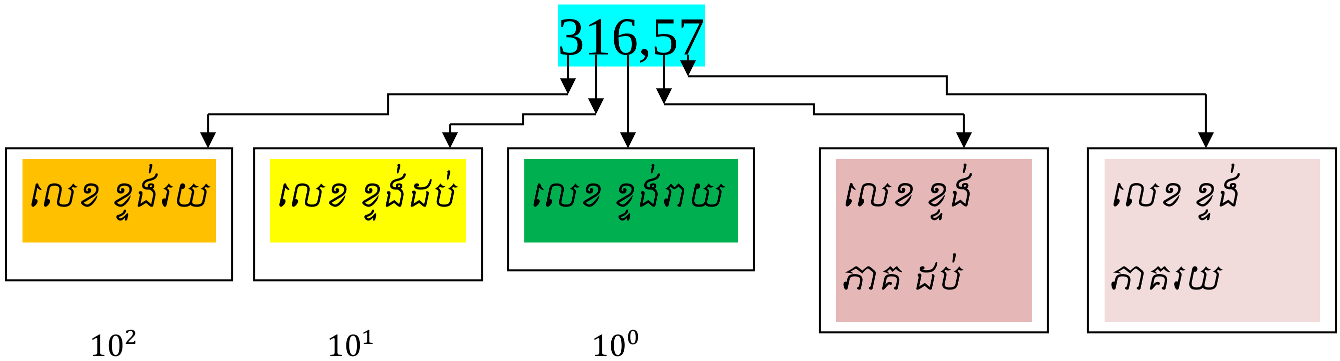
<u>ចំនួនពិត</u>

APPROXIMATIONS DECIMALES
NOMBRES RÉELS

<u>លំនាំដើម</u>

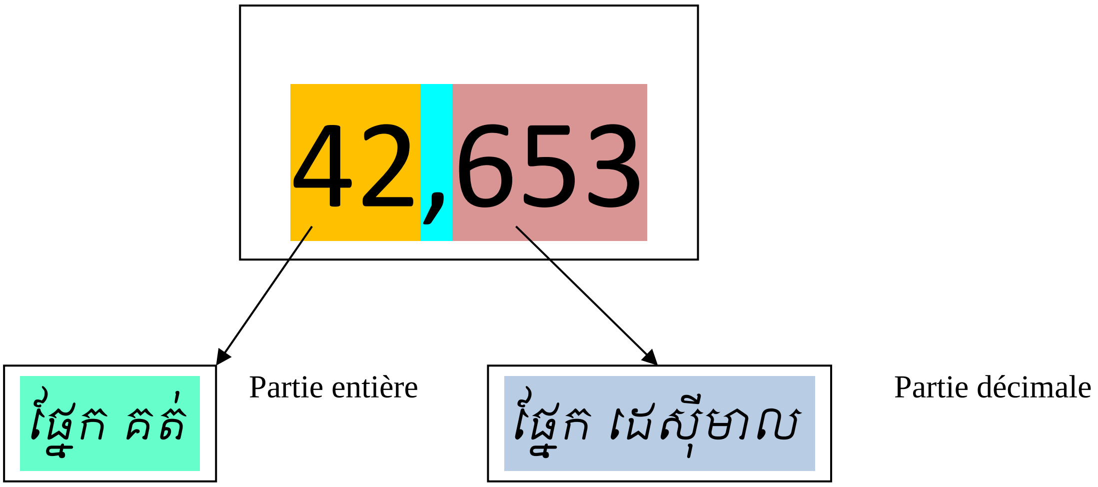
ក្នុងការរសនៅសព្វថ្ងៃ ចំនួនដែលយើង សរសេរ យើងប្រើ ហៅថា <u>ចំនួនដេស៊ីមាល</u> (nombre décimal) ដូចជា ៖ 6 21,53 243,00 316,57 ជាដើម ។ ដើម្បី សរសេរ ចំនួន ខាងលើនេះ គេប្រើ លេខ ពី សូន្យ (០) ទៅដល់ ប្រាំបួន(៩) ដូច្នេះ មាន ដប់ លេខ ។ ពាក្យ ដេស៊ីមាល គឺលេខ ទីមួយៗ ដែលនៅ<u>ខាងស្តាំ កណ្តក់សញ្ញា</u>។

<u>ឧទាហរណ៍</u> ដូចជា ៖



10^2 10^1 10^0 $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ $\frac{1}{100} = 10^{-2}$

$3\times 10^2 + 1\times 10^1 + 6\times 10^0 + 5\times 10^{-1} + 7\times 10^{-2} = 316{,}57$



យើងក៏ធ្លាប់បានរៀនហើយដែរ នូវចំនួន គត់ក្នុងសំនុំ N ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបក្នុងសំនុំ Z និង ចំនួនសនិទានក្នុងសំនុំ Q កំណត់ដោយ ៖

$Q = \left\{ \frac{a}{b},\ \text{ដែល } a \text{ និង } b \text{ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និង } b \neq 0 \right\}$ ។

បើ $b = 1$ យើងឃើញថា $\frac{a}{b}$ ស្មើនឹង a ដែលជាចំនួន គត់រ៉ឺឡាទីប ដូច្នេះ សំនុំ Z នៅ ក្នុង សំនុំ Q ហើយក៏ដូចគ្នាដែរ សំនុំ N នៅក្នុង សំនុំ Z គឺថា $N \subset Z \subset Q$ ។

តែ សំនុំ Q ថ្វីបើ ធំយ៉ាងនេះក៏ដោយ ក៏នៅពុំទាន់គ្រប់គ្រាន់ ចំពោះចំនួនខ្លះទៀត ដែលយើងបានជួបក្នុងគណិតសាស្ត្រ ។

1. រង្វាស់ និង តម្រុយ នៃ ទំហំ (Mesure et repérage des grandeurs).

ដូចជាខាងធរណីមាត្រ ធ្វើឲ្យអ្នកគណិតសាស្ត្រជាតិក្រេច (les mathématiciens grecs) ទទួលថាមាន រឹសការេ នៃចំនួនវិជ្ជមានជាទូទៅ ។ ការបញ្ចូល និមិត្តរូប (symbole) √ តំណាង រឹសការេ អាចវាស់ប្រវែងអង្កត់ទាំងឡាយ ដែលគេគូរ ដោយ បន្ទាត់ និង ដែកឈាន (par la règle et le compas) ដោយគេយក <u>អង្កត់ណាមួយ ជាខ្នាត</u>។ តែ និមិត្តរូបទាំងនោះ មិនអាចឲ្យ « តម្លៃ » ទៅ ប្រវែងវង្វង់ ដែលមានកាំ ស្មើនឹង ១

ឬក៏ផ្ទៃក្រឡាដែលផ្ទង់នោះព័ទ្ធជុំវិញឡើយ។ គេអាចបង្ហាញថា « ចំនួន » π មិនមែនជា វិសការ នៃចំនួន សនិទានណាមួយ ទេ ហើយក៏មិនមែនជា ចម្លើយ នៃសមីការពហុធា ដែលមានមេគុណ ជាចំនួនគត់ដែរ ។

ជាទូទៅ ចំណោទក្នុងការវាស់ទំហំ នាំឲ្យយើងបញ្ចូលនូវ «ចំនួន » ដែលយើងពុំច្បាស់ថាជាចំនួន សនិទាន ឬ ក៏ជាចំនួនពីជគណិត។ តែចំពោះចំណោទនេះ យើងក៏ត្រូវបោះបង់ចោល នូវគំនិតដំបូង ដែលគិតថា ជា « រង្វាស់ » **ត្រឹមត្រូវ** (mesure exacte)[1] ។ សញ្ញាណ ទំហំ ជាសញ្ញាណដែលយើងដឹងមិនបាច់ពិចារណា ព្រោះយើងជួបប្រទះនឹងសញ្ញាណនេះ ក្នុងជីវិតរស់នៅសព្វថ្ងៃ ដូចជា ៖ ប្រវែង ចំណុះ ទម្ងន់ ពេល កំដៅ ល្បឿន កម្លាំង ចរន្តអគ្គីសនី.... ។ល។ ដោយពុំចង់ដាក់ជាស្វ័យស័ត្យ (axiome) យើងអាចសន្មត ថាអាចប្រៀបធៀប នូវទំហំទាំងឡាយ ដែលមានប្រភេទដូចគ្នា ហើយយើងក៏មានសញ្ញាណថាទំហំក៏អាចផ្លះប្តូរជាប់ជាបន្តៗទៅ[2] (grandeur variant continûment)។ គេថាទំហំទាំងឡាយ នៃប្រភេទណាមួយ «វាស់បាន » (mesurable) បើកាលណាគេអាចបូក ទំហំនោះ ។ ហើយវិធីបូក ត្រូវ បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌដូចតទៅ ៖

១-វិធីបូក មានលក្ខណៈត្រលប់ (commutative) និង លក្ខណៈផ្តុំ (associative) បានន័យថា គេអាចបូកទំហំច្រើន ដោយតាមលំដាប់ដែលគេចង់

២-វិធីបូក មានធាតុនប៉ុសកលិគ្គ (élément neutre) ហៅថា **ទំហំសូន្យ**

៣- ទំនាក់ទំនង $A \geq B$ មានន័យដូចគ្នានឹងថា៖ មានទំហំ C ដែលឲ្យ $A = B+C$ (បានន័យថា ទំហំ សូន្យ ជាទំហំ តូចជាងគេបំផុត)

៤- ទំនាក់ទំនង $A+B = A+C \Rightarrow B = C$ (អាចឲ្យន័យដល់ $A - B$ កាលណា

[1] ហេតុនេះហើយ បានជាមានពាក្យ « រង្វាស់ » **ប្រហែល**

[2] ដូចយ៉ាង កំដៅ ធាតុអាកាសផ្លាស់ប្តូរជាប់តៗគ្នាជានិច្ច។

$A \geq B$) ។

ដូច្នេះ គេអាច ឲ្យអត្ថន័យ ដល់ ទំហំ nA (ចំពោះ ចំនួនគត់ n ប៉ុន្មានក៏ដោយ) គឺ ជាផលបូក n ដង នៃទំហំ A ។

ទំនាក់ទំនង A ≥ B => nA ≥ nB ហើយ ចំពោះ n ≥ p $(n, p \in N)$, $nA \geq pA$ ។

ដើម្បី វាស់ ទំហំមួយ គេចាប់រើសយក ទំហំខុសពីសូន្យ មានប្រភេទដូចគ្នានឹងទំហំដែលត្រូវវាស់ ទំហំនោះគេហៅថា « **ឯកតា** » (unité) ។ បន្ទាប់មកគេចាប់ ព័ទ្ធ ទំហំដែលវាស់នោះ ដោយពីរ ចំនួនគត់បន្ទាប់គ្នា បានមកដោយប្រើ« ឯកតា » គឺថា ៖

បើ X ជាទំហំត្រូវវាស់ និង U ជាឯកតា នោះ (U, X) ត្រូវ បំពេញ វិសមភាព ៖

$$nU \leq X < (n+1)U$$

គេថាចំនួនគត់ n ជា រង្វាស់ប្រហែល ខ្វះ[3]នៃទំហំ X (n est la mesure approchée par défaut de la grandeur X) ។ តែ រង្វាស់ប្រហែលនោះមាន បើសិន ក្នុងចំណោមចំនួន n ទាំងឡាយដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $nU \leq X$ នោះ មានចំនួន M មួយធំជាងគេ ។

ដូច្នេះយើងត្រូវសន្មត ថា ទំហំដែលមានរង្វាស់ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង សម្មតិកម្ម (hypothèse) ដែលយើងនឹងឃើញ ទៅពេលខាងមុខ §9 ហៅថា **ស្វ័យសត្យ អារស៊ីម៉ែត** [4](Axiome d'Archimède) ។ សម្មតិកម្ម (hypothèse) នោះដូចតទៅ ៖

« ចំពោះ គូ (U, X) នៃទំហំណាក៏ដោយ ឲ្យតែមានប្រភេទដូចគ្នា ហើយ U ខុសពីសូន្យ នោះគេមានចំនួនគត់ p ដែលឲ្យ $pU > X$ » ។

ម្យ៉ាងទៀត រង្វាស់ប្រហែល ដែលបាននោះ កាន់តែត្រឹមត្រូវ កាលណា ឯកតា U កាន់តែតូច ៖ នេះនាំឲ្យយើងប្តូរយក ឯកតាថ្មី ដែលជាប្រភាគនៃ ឯកតាចាស។ តែយើងក៏ត្រូវសន្មតថាចំពោះចំនួនគត់ p (p ≥ 2) គេចេះចែក ទំហំដែលអាចវាស់បាន

---

[3] រង្វាស់ប្រហែលខ្វះ គឺ ខ្វះត្រឹម មួយ ឯកតា

[4] សេចក្តីស្នើ (proposition) មិនអាចបង្ហាញបាន ដែលត្រូវតែទុកជាត្រូវ។

នោះ (grandeur mesurable) ជា p ចំណែកគត់តែម្តង ។ ដូច្នេះ យើងសន្មតថា ទំហំដែលអាចវាស់បាន ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង «**ស្វ័យស័ត្យនៃការចែក** » (axiome de division) ដែលនឹងថ្លែងនៅ **§9** ។ ហើយយើងនឹងឃើញនៅ §10 ថា ដោយស្វ័យស័ត្យទាំងនេះ តាមទ្រឹស្តី គេអាចឲ្យអត្ថន័យ អំពីរង្វាស់ ត្រឹមត្រូវ នៃ ទំហំដែលអាចវាស់បាន (la mesure exacte d'une grandeur mesurable) ។

តែក្នុងការប្រតិបត្តិ ទោះជាទំហំអាចវាស់បានក្តី មិនអាចវាស់បានក្តី គេច្រើនតែប្រើកុងទ័រ (compteurs) ក្នុងការវាស់ លទ្ធផលរូបសាស្ត្រ (effet physique) នៃទំហំទាំងនោះ (ដូចជា ដែករីកដោយកំដៅ ការយឺតនៃរ៉ឺស្ស័រ កំពស់ទឹកឡើងចុះ ។ល។) ។ ទ្រនិចរតចុះឡើងមុខផ្ទាំងលេខ ឬ លើបន្ទាត់ដែលចែកជាឯកតា ក៏អាចវាស់ទំហំបានដែរ ។ បើទំហំនោះវាស់មិនបាន គេដាក់តម្រុយ ដៅចំណាំ (repérage)៖ ចំពោះ ទំហំ នៃប្រភេទដែលគេសិក្សា គេផ្គូជាមួយនឹងចំនួន (ជាលេខ) ដែលកើន ជាមួយនឹងទំហំនោះ ហើយគេនៅតែហៅ (ដោយមិនចំ)ថាជា «រង្វាស់ » ដដែល ។

តែទុកជាប្រើប្រដាប់វាស់ល្អយ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏គេពុំអាចថា ការដៅចំណាំទំហំនោះ **បានត្រឹមត្រូវនោះទេ ៖ ព្រោះថា ម្ជុលដែលចង្អុល លេខនោះ ក៏វាមានកម្រាស់ដែរ ហើយ** គំនុស បើផ្ទារខ្វាំងពេកនោះ ក៏មើលមិនឃើញដែរ។ ហើយមួយទៀត មានកម្លាំងធម្មជាតិបន្ទាប់បន្សំមកចូលលាយឡំជាមួយ ដែលតម្រូវឲ្យកែរតែយើងក៏ដឹងមិនច្បាស់ដែរ ។ រួមសេចក្តីទៅ យើងគ្រាន់តែបាន រង្វាស់ប្រហែលៗ នឹងរង្វាស់ត្រឹមត្រូវ នៃ ទំហំក្នុងធម្មជាតិ ។

តែដោយចិត្តមនុស្ស ស្រឡាញ់ភាពល្អឥតខ្ចោះ ចាប់ជឿថាមាន រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ ដែលគេអាចរកបាន បើសិនគេអាចបង្កើតគ្រឿងប្រដាប់វាស់ត្រឹមត្រូវឥតខ្ចោះ។ ដោយយើងពុំទាន់រកបាននូវ គ្រឿងប្រដាប់វាស់ត្រឹមត្រូវឥតខ្ចោះនោះនៅឡើយ យើងអាចស្រម័យថា

រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ ជា លីមីតរួម នៃ រង្វាស់ប្រហែលទាំងឡាយ ដែលបានដោយ គ្រឿងប្រដាប់វាស់កាន់តែត្រឹមត្រូវទៅៗ រហូតដល់ត្រឹមត្រូវជាដាច់ខាត(la précision tendrait à être absolue) ។ ដើម្បីប្រឌិត សញ្ញាណអរូបី (notion abstraite) នៃរង្វាស់ត្រឹមត្រូវ គេត្រូវបំភ្លេច បត្តិភូតិទាំងឡាយ ដែលមកធ្វើឲ្យចំណោទនេះកាន់តែពិបាក ។

ចំពោះគណិតសាស្ត្រ រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ របស់ទំហំមួយ ជាគោលទាល់លើ (borne supérieure) នៃរង្វាស់ប្រហែលខ្វះទាំងឡាយ (de ses valeurs approchées par défaut) និងជាគោលទាល់ក្រោម (borne inférieure) នៃរង្វាស់ប្រហែលលើស[5] ទាំងឡាយ (de ses valeurs approchées par excès)

រង្វាស់ប្រហែលខ្វះ $\leq$ រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ $\leq$ រង្វាស់ប្រហែលលើស

រី បើនិយាយជាស៊ីត បើគេតាងដោយ ៖

(x_n) : ស៊ីត នៃ រង្វាស់ប្រហែលខ្វះ ទាំងឡាយ ដែលបានមកដោយប្រើ គ្រឿងវាស់កាន់តែប្រណីតឡើងៗ

(x'_n) : ស៊ីត នៃ រង្វាស់ប្រហែលលើស ទាំងឡាយ ដែលបានមកដោយប្រើ គ្រឿងវាស់ កាន់តែប្រណីតឡើងៗ

នៅពេលនោះ x រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ គឺជា <u>ចំនួនតែមួយ</u> ដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង

$x_n \leq x \leq x'_n$, $\forall n$។ ហើយបើមើលតាមអរូបី (du point de vue abstrait)ស៊ីតទាំងពីរ (x_n) និង (x'_n) ជាស៊ីតនៃចំនួន សនិទាន វិជ្ជមាន ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង លក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ ៖

1° $\forall n$, គេបាន : $x_n \leq x_{n+1} < x'_{n+1} \leq x'_n$ (1)

2° ផលសង : $x'_n - x_n$ ខិតជិត សូន្យ ។

[5] រង្វាស់ប្រហែលលើស គឺ លើស យកត្រឹមមួយឯកតា

យើងគួរសួរដែរ ថាតើ (1) នេះបានមកពីណា? ដើម្បីយល់ យើងមើលនិយមន័យ

- ស្វ៊ីត (x_n) ខាងលើ យើងឃើញថា x_n ជារង្វាស់ប្រហែល <u>តូចជាង</u> រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ តែដោយគ្រឿងវាស់កាន់តែប្រណីត x_n កាន់តែឡើងទៅជិតតម្លៃត្រឹមត្រូវ x ដូច្នេះ (x_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។
- ចំណែក ស្វ៊ីត (x'_n) វិញ យើងឃើញថា x'_n ជារង្វាស់ប្រហែល <u>ធំជាង</u> រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ តែដោយគ្រឿងវាស់កាន់តែប្រណីត x'_n កាន់តែចុះទៅជិតតម្លៃត្រឹមត្រូវ x ដូច្នេះ (x'_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ដើម្បីតាង រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ ដោយចំនួន នោះត្រូវតែពង្រីក សញ្ញាណចំនួន ដែលធ្វើឲ្យ « **សំនុំ** ដែលមានតំលៃដំឡើងនោះ ត្រូវទទួលថា មានគោលទាល់លើ » (Il faut donc étendre la notion de nombre de manière que tout ensemble majoré admette une borne supérieure) ឬក៏ថា ស្វ៊ីតទាំងគូ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង ល័ក្ខខ័ណ្ឌ **1°** និង **2°** អម «ចំនួន» យ៉ាងតិចណាស់មួយ (encadre au moins un nombre) ។ យើងនឹងឃើញល័ក្ខខ័ណ្ឌនេះ នៅ §9 ក្រោមឈ្មោះថា **ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ** (axiome de Cantor) ។

ចំនួន ដ៏ទូលំទូលាយទាំងឡាយដែល (les nombres généralisés) បានដោយរបៀបខាងលើនេះ សព្វថ្ងៃគេហៅថា **ចំនួនពិត** ។ សំនុំនៃចំនួននេះ គេតាងដោយអក្សរ R ហើយ ហៅថា បន្ទាត់នៃចំនួន (droite numérique)។

ដើម្បីស្ថាបនាចំនួនពិត របៀបដែលស្របទៅនឹងកំរិតថ្នាក់ទី ១២ គឺ របៀបដោយប្រើ « ***ការពង្រីកដេស៊ីមាលដោយគ្មានទីបញ្ចប់*** » (développements décimaux illimités) ។

2. ចំនួនដេស៊ីមាល - ចំនួនប្រហែលរហូតដល់ដេស៊ីមាល (nombres décimaux – Approximations décimales)

ដើម្បី ងាយយល់ យើងសង្កេត នូវចំនួន សនិទានខ្លះ ដូចជា $\frac{1}{7}$ ឬចំនួន អសនិទានដូចជា $\sqrt{2}$ តើចំនួន ទាំងពីរនេះ ខុសគ្នាដោយរបៀបណាខ្លះ ?

a/ ចំពោះ 1/7 បើយើងធ្វើលេខចែកធម្មតា តាមដែលយើងធ្លាប់ធ្វើ គឺ យក 1 ទៅចែកនឹង 7 ហើយដោយចែកមិនដាច់ ព្រោះចេះតែនៅមានសល់ នោះយើងបន្ថែម សូន្យ ហើយបន្ត លេខចែកតទៅទៀតៗ បើយើងតាងដោយ r ចំនួនសល់ ទាំងឡាយ កាលណាយើងចេះតែបន្តលេខចែកនេះ យើងនឹងឃើញថា r ជាចំនួនគត់ នៅក្នុងចន្លោះ [1 ; 6] $(1 \leq r \leq 6)$ ព្រោះថា $r < 7$ ហើយយើងចែកមិនដាច់ (បើចែកដាច់ $r = 0$)ៗ បើសរសេរជាសំនុំ $r \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ដូច្នេះ r មានតែ ប្រាំមួយ តម្លៃ តែប៉ុណ្ណោះ ហើយបើយើងបន្តលេខចែក (ដោយថែមសូន្យ) លើសពី ប្រាំមួយដង តើ សំណល់ r អាចត្រឡប់ វិលមករក សំណល់ចាស់ពីមុននោះទេ ? យើងឆ្លើយថា វិលមករកសំណល់ចាស់ជានិច្ច ។ បើមិនជឿ សាកល្បងធ្វើលេខចែកខាងលើនេះចុះ ហើយនឹងឃើញដូចខាងក្រោមនេះ ៖

TAB-1

1/7 ≅ 0, 142.857	(a1)
1 /7 ≅ 0, 142.857.142	(a2
1 /7 ≅ 0,142.857.142.8	a3)
1 /7 ≅ 0,142.857.142.85	(a4)

ដោយសង្កេត តារាងខាងលើនេះ យើងទាញបាននូវលទ្ធផលអ្វីខ្លះ ?

1- ដោយ ភាគយក 1 តូចជាងភាគបែង 7 នោះយើងត្រូវថែមសូន្យហើយ ដាក់កណ្តាក់សញ្ញា មុននឹងចាប់ធ្វើលេខចែកជាដំបូង ហើយយើងបាន : 0,1 ។

មើលបន្ទាត់ (a1) ៖

លើក ទី ១ យើងបានលេខ 1

លើក ទី ២ យើងបានលេខ 4

លើក ទី ៣ យើងបានលេខ 2

លើក ទី ៤ យើងបានលេខ 8

លើក ទី ៥ យើងបានលេខ 5

<u>លើក ទី ៦ យើងបានលេខ 7</u>

លើក ទី ៧ យើងបានលេខ 1 (មើលបន្ទាត់ (a2))

លើក ទី ៨ យើងបានលេខ 4 (មើលបន្ទាត់ (a2))

2- ដោយចែកមិនដាច់ បន្ទាប់ពីចែក ប្រាំមួយដងមក យើងឃើញថា ដេស៊ីមាល ទី៧ ស្មើនឹងដេស៊ីមាល ទីមួយ ហើយដេស៊ីមាល ទី៨ ស្មើនឹងដេស៊ីមាល ទី២ បានន័យថា លទ្ធផលនៃការចែក 1/7 ជាចំនួនដេស៊ីមាល**ខួប** (T) ដោយ T = 6 ។ ហើយ T = 6 នេះ មកពីសំណល់ r ដែលត្រូវ តូចជាង 7   ដូចបានពន្យល់ខាងលើរួចមកហើយ ។

3- ដោយ 1/7 ជាចំនួនដេស៊ីមាល ខួប នោះក្នុងការប្រើប្រាស់ គេពុំអាចសរសេរ រហូតដល់អនន្តនោះទេ ដូច្នេះ គេត្រូវតែកាត់ យកត្រឹមណាមួយ បើយកដេស៊ីមាល កាន់តែច្រើន ចំនួនកាត់នោះ [ហៅថា **<u>ចំនួនប្រហែល</u>**] ក៏កាន់តែជិតតម្លៃត្រឹមត្រូវ ។ មើល TAB-1 យើងឃើញថា 1/7 នៅបន្ទាត់ (a2) ក្បែរនឹងចំនួនត្រឹមត្រូវ ជាង 1/7 នៅបន្ទាត់ (a1) ។ តាមនិយមន័យ §1,

1/7 $\cong$ 0, 142.857 ជា <u>ចំនួនប្រហែល**ខ្វះ**</u> យកត្រឹម 10^{-6}

1/7 $\cong$ 0, 142.858 ជា <u>ចំនួនប្រហែល**លើស**</u> យកត្រឹម 10^{-6} ។

ព្រោះថា បើយើងមើលបន្ទាត់ (a4)

0,142.857 < 0,142.857.142.85 < 0,142.858

(I) < (II) < (III)

យើងឃើញថា (II) នៅតែតូចជាង (III)[6] ទោះបី យើងតម្លើង ការចែកលេខ រាប់ម៉ឺនដងក៏ដោយ ព្រោះថានៅពេលនោះ គឺ មានតែចំនួនលេខនៅផ្នែក 142.85…… ទេដែល

[6] ពីព្រោះ (0,142.858 - 0,142.857.142.85) = 0,000.000.85715 > 0   ហើយ 0,000.000.85715 < 10^{-6}

បន្ថែម ។ ហេតុនេះហើយ បានជាគេថា (I) ជាចំនួនប្រហែលនឹង <u>ចំនួនត្រឹមត្រូវ</u> ព្រោះទៅដល់លីមីត គឺ (II) ដែលជាចំនួនត្រឹមត្រូវ ។

<u>b/ ចំពោះ $\sqrt{2}$</u> បើយើងគណនា ៣ស៊ីនការ តាមដែលយើងធ្លាប់រៀនមកនោះយើងពុំអាចជួបនឹង ខួប ដូចចំនួន សនិទាន នោះទេ ។ គួរសង្កេតដែរថា √ ជាគំនូរ ជានិមិត្តរូប មិនមែន ជាលេខទាំងអស់ដូច ចំនួន សនិទាននោះទេ ។

ដោយគណនា យើងបានចំនួនប្រហែល នៃ $\sqrt{2} \cong$ 1,414213562..... ហើយកាលនៅរៀន លោកគ្រូឲ្យយើងទន្ទេញចាំមាត់ $\sqrt{2} \cong 1{,}414$ នេះបានន័យថា យើងឃ្លាតពីចំនួនត្រឹមត្រូវ 10^{-3} (ព្រោះយើងយកតែ បីលេខ បន្ទាប់ពី កណ្ដក់សញ្ញា) ។

ឥឡូវយើងវិល មកមេរៀនយើងវិញ

មុននឹង និយាយអំពី ការពង្រីកដេស៊ីមាលដោយគ្មានទីបញ្ចប់ យើងគួររំលឹកឡើងវិញ ថាអ្វីទៅ « ចំនួនផ្នែកដេស៊ីមាល» ។ សញ្ញាណនេះ ដែលបានស្គាល់តាំងតែនៅបឋមសិក្សា ព្រមទាំង របៀបគណនានៃចំនួនផ្នែកដេស៊ីមាលទាំងអស់នេះគួរតែបញ្ជាក់ឡើងវិញ ។

<u>និយមន័យ</u>

គេ ហៅថា « **ប្រភាគដេស៊ីមាល** » **(fraction décimale)** គឺប្រភាគ ដែលភាគបែងជា 10^n $(n \epsilon N)$ ។ ឧទាហរណ៍ $\frac{17}{10^3}$, $\frac{3}{2^8}$, $\frac{8}{5^3}$ ជាប្រភាគដេស៊ីមាល ពីព្រោះ

$\frac{3}{2^8} = \frac{3\times5^8}{2^8\times5^8} = \frac{3\times5^8}{(2\times5)^8} = \frac{3\times5^8}{(10)^8}$; តែ $\frac{3}{14}$ មិនមែនជាប្រភាគដេស៊ីមាល ទេ ពីព្រោះ ក្នុងការបំបែកជាចំនួនបឋម **(nombre premier)** $10 = 2 \times 5$ ដូច្នេះ ដើម្បីជា **ប្រភាគដេស៊ីមាល** ទាល់តែភាគបែង មានរាងជា $2^m \times 5^p$ $(m \in N, p \epsilon N)$ ហើយភាគយក ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។

គឺថាមានរាងជា ៖

$$\frac{b}{2^m \times 5^p} \quad \text{ដោយ } b \epsilon Z,\ m \epsilon N, p \epsilon N$$

ដូច្នេះ ចំនួនដេស៊ីមាល (ចំនួនដែលប្រើសព្វថ្ងៃ) ជា ប្រភាគដេស៊ីមាល ព្រោះថា $257{,}25 = \frac{25725}{10^2}$ ។

<u>**ចំនួនដេស៊ីមាល** (un nombre décimal)</u>

គឺ ជា ចំនួនសនិទាន ដែលគេអាចសរសេរ ជា ប្រភាគដេស៊ីមាល (ដូចជា $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$) (Un nombre décimal est un nombre rationnel qui peut être représenté par une fraction décimale.) ៖ ប្រភាគដេស៊ីមាលនីមួយៗ , $\frac{a}{10^n}$ ជាតំណាង ចំនួនដេស៊ីមាលតែមួយគត់ ដែលនឹងតាងដោយ $10^{-n}a$ ។ បើ ចំនួន a សេសេរក្នុងប្រព័ន្ធដេស៊ីមាល (système décimal)[7] ជា $a = a_p a_{p-1} \ldots a_1 a_0$ នោះចំនួនប្រភាគ $10^{-n}a$ ទៅជា $a_p a_{p-1} \ldots \boldsymbol{a_n}, a_{n-1} \ldots \ldots a_1 a_0$ បើ $p \geq n$ ហើយ ទៅជា $0{,}000 \ldots .. 0a_p \ldots \ldots a_1 a_0$ បើ $p < n$, ចំនួនសូន្យនៅមុខ a_p មាន $n - p$ ដោយ a_p ជាលេខ<u>ទីមួយមិនសូន្យ</u> ។

<u>ឧទាហរណ៍</u>

1/ $10^{-3} \times (47263) = 47{,}263$ (n=3, p = 4) => $p \geq n$

$10^{-3} \times (a_4 a_3 a_2 a_1 a_0) = a_4 a_3, a_2 a_1 a_0$

2/ $10^{-8} \times (47263) = 0{,}00047263$ (n=8, p = 4) => $p < n$

$10^{-8} \times (a_4 a_3 a_2 a_1 a_0) = 0{,}000 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$

ផ្ទុយទៅវិញ <u>ចំនួនដេស៊ីមាល</u> នីមួយៗ អាចសរសេរជា <u>ប្រភាគដេស៊ីមាល</u>បានច្រើនអនេក ព្រោះថា ប្រភាគដេស៊ីមាល $\frac{a}{10^n}$ និង $\frac{10^p a}{10^{p+n}}$ សមមូលនឹងគ្នា $\forall p \in N$ ។

---

[7] ចំនួន ប្រើសព្វថ្ងៃ គឺសរសេរក្នុងប្រព័ន្ធដេស៊ីមាល ឧបមាដូចជា 253 = $2.10^2+5.10^1+3.10^0$ (គឺគេយក 10 ជាបាតគុណ) – Nombre à base 10។

តែនៅក្នុងការសរសេរ ចំនួនដេស៊ីមាល គេអាចឆ្លងពី របៀបសរសេរមួយ ទៅរបៀបមួយទៀត ដោយ បន្ថែមសូន្យ ឬ លប់សូន្យ នៅខាងស្តាំដេស៊ីមាលចុងក្រោយគេខុសពីសូន្យ (ដូចជា 253,370 = 253,37 = 253,37000 = ….) ។ នេះជាក្បួនមួយ សម្រាប់ប្រៀបធៀប ចំនួនដេស៊ីមាលពីរ ដែលតំណាង ចំនួនតែមួយ ។ នៅឧទាហរណ៍ខាងលើ ចំនួនដេស៊ីមាល 253,370 និង 253,37000 ជាតំណាងចំនួនតែមួយគឺ 253,37 ។

ម្យ៉ាងទៀត ចំនួនដេស៊ីមាល នីមួយៗ មានតំណាង<u>តែមួយ</u> មានជារាង $\frac{a}{10^n}$ ដោយ a ជាចំនួនគត់ <u>ចែកនឹង 10 មិនដាច់</u> (ដូចជា 25,351អាចសរសេរជា $\frac{25351}{10^3}$)។

ដោយហេតុនេះ (គឺមានរាងជា $\frac{a}{10^n}$) ចំនួនដេស៊ីមាលទាំងអស់ ប្រមូលទៅបានជា សំនុំមួយ <u>នៅក្នុង</u> សំនុំចំនួនសនិទាន (Q) ដូច្នេះ គេអាចធ្វើលេខបូក លេខគុណ បានដូចចំនួនប្រភាគ នៅក្នុង (Q) ដែរ ។

ម្យ៉ាងទៀត យើងអាចរាប់យក <u>ប្រភាគដេស៊ីមាល</u> ដែលមាន <u>ភាគយក</u> ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ៖ <u>ចំនួនដេស៊ីមាល</u>ទាំងនោះហៅថា <u>រ៉ឺឡាទីប</u> ហើយ ចំនួនដេស៊ីមាលរ៉ឺឡាទីបពីរគុណគ្នា បានជាចំនួនដេស៊ីមាល តែ ចំនួនផ្នែកដេស៊ីមាលពីរ ចែកនឹងគ្នា <u>អាចមិនបាន</u> ជាចំនួនដេស៊ីមាល [8]។ <u>ឧទាហរណ៍</u> ៖ $\frac{2}{10^2} \times \frac{3}{10^5} = \frac{6}{10^7}$ តែ

$\frac{2}{10^2} / \frac{3}{10^5} = \frac{2}{10^2} \times \frac{10^5}{3} = \frac{2000}{3}$ ។

<u>ការសរសេរចំនួនដេស៊ីមាលរ៉ឺឡាទីប(nombre décimaux relatifs) មួយបែបទៀត</u>

[8] ចំពោះអ្នកបានសិក្សាពី **ពីជគណិត** សំនុំ ចំនួនដេស៊ីមាល មិនមែនជាគ័រ (corps)ទេ តែគ្រាន់តែជា អាណូ (anneau) (sous-anneau de l’anneau Q).

យើងធ្លាប់សរសេរ ចំនួនដេស៊ីមាល ដូចជា - 235,42 ដែលស្មើនឹង -235 + (-0,42) ឥឡូវ

នេះ គេចង់បាន ផ្នែកដេស៊ីមាល ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដោយបំបែកចំនួនដេស៊ីមាល ជា៖

-235,42 = -235 – 0,42 = (-235 -1) + (1 – 0,42) = -236 + $\propto$ ដោយ $0 \le \propto < 1$

ហើយចំពោះ ឧទាហរណ៍នេះ $\propto = 0,58$ ។

ជាទូទៅ ចំនួនផ្នែកដេស៊ីមាលរឺឡាទីប តំណាងចំនួន A អាចសេរសេរ តែមួយបែបគត់ ជា ផលបូក នៃចំនួនគត់រឺឡាទីប a_0 ជាមួយនឹង ផ្នែកដេស៊ីមាល $\propto$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $0 \le \propto < 1$ ៖ ចំនួនគត់ a_0 គឺជាចំនួនគត់រឺឡាទីប a ដែលធំជាងគេ ហើយបំពេញ $a \le A$ ។

ដូចជាចំពោះ ឧទាហរណ៍ខាងលើ $a_0 = -236 \le -235,42$ ។ បើយើងតាង ដោយ

$0,a_1a_2\ldots\ldots a_n$ ជាតំណាង ផ្នែកដេស៊ីមាល $\propto$ យើងថា និមិត្តរូប $a_0,a_1\ldots..a_n$ ជា តំណាង ចំនួនដេស៊ីមាលរឺឡាទីប A ។

ក្នុងរបៀបសរសេរថ្មីនេះ a_0 សំដៅ ចំនួនរឺឡាទីបណាមួយ ហៅថា ផ្នែកគត់នៃចំនួន A ហើយ ដេស៊ីមាល $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ជាចំនួនគត់ បំពេញ $0 \le a_i \le 9$ ។ យើងអាច សន្មតថា $a_n \neq 0$ (បើយើងចង់)។

ការតាងចំនួនដេស៊ីមាលបែបនេះ គឺមានប្រើក្នុងតារាង លោការីត ដោយ ផ្នែកដេស៊ីមាលហៅថា ម៉ង់ទីស (mantisse) ។ ជារបៀបសេរសេរមួយ ដែលយើងនឹង ប្រើទៅខាងមុខ សម្រាប់ ពង្រីកសញ្ញាណ ចំនួនដេស៊ីមាល ។

ចំនួនឌីយ៉ាឌីក (nombres dyadiques).

គេក៏ កំណត់ដូចគ្នាចំពោះ ប្រភាគឌីយ៉ាឌីក (fractions dyadiques) គឺជា ប្រភាគដែល ភាគបែង ជាចំនួន 2^n $(n \in N)$។ ហើយចំនួនឌីយ៉ាឌីក (les nombres dyadiques)

គឺជាចំនួនសនិទាន តាងដោយ ប្រភាគឌីយ៉ាឌីក។ ចំនួនឌីយ៉ាឌីករឿឡាទីបទាំងអស់ រួមជា សំនុំ មួយនៅក្នុងសំនុំសនិទាន Q[9] ។ នៅក្នុងប្រព័ន្ធប៊ីនែរ (système de numération de base 2), ចំនួនប៊ីនែរ រឿឡាទីប តាងដោយការបំបែកមានរាងជា $a_0, a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$ ហើយនៅក្នុងនោះ ចំនួន a_0 គឺជាចំនួនគត់ដែលមាន សញ្ញាពីមុខ $\pm$ តែ $a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n$ មិនអាចយកតម្លៃក្រៅពី 0 ឬ 1 បានឡើយ ។

ជាទូទៅ នៅក្នុងប្រព័ន្ធបាត (base) k[10] (Système de numération de base k) យើងសន្មតថានិមិត្តរូប $a_0, a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$ ជាតំណាង ចំនួន សនិទាន

(F1) $\sum_{i=0}^{i=n} k^{-i} a_i$ ហើយ $a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n$ ជាចំនួនគត់ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $0 \leq a_i < k$

<u>ឧទាហរណ៍-1</u> ចំពោះ k = 2 (ប្រព័ន្ធប៊ីនែរ), (F1) ឲ្យ៖

$A = \sum_{i=0}^{i=n} 2^{-i} a_i$ ហើយ $a_1\ a_2 \ldots\ldots a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $0 \leq a_i < 2$

$A = 2^{-0}a_0 + 2^{-1}a_1 + 2^{-2}a_2 + 2^{-3}a_3 + 2^{-4}a_4 + 2^{-5}a_5 + \ldots\ldots\ldots$

$A = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \frac{a_5}{2^5} + \ldots\ldots$ ហើយ $a_i = 0$ ឬ 1 ចំពោះ $i \geq 1$ ។

<u>ឧទាហរណ៍-2</u> ចំពោះ k = 10 (ប្រព័ន្ធ ដេស៊ីមាល), (F1) ឲ្យ៖

$A = \sum_{i=0}^{i=n} 10^{-i} a_i$ ហើយ $a_1\ a_2 \ldots\ldots a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $0 \leq a_i < 10$

$A = 10^{-0}a_0 + 10^{-1}a_1 + 10^{-2}a_2 + 10^{-3}a_3 + 10^{-4}a_4 + 10^{-5}a_5 + \ldots\ldots\ldots$

(F2) $A = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \frac{a_5}{10^5} + \ldots\ldots$ ហើយចំពោះ $i \geq 1$ $0 \leq a_i \leq 9$ ។

បើឲ្យ $a_0 = 257,\ a_1 = 3,\ a_2 = 0,\ a_3 = 8,\ a_4 = 6,\ a_i = 0$ ចំពោះ $i \geq 5$

---

[9] មាន កម្មសិទ្ធិ ដូចគ្នានឹង សំនុំចំនួនទសភាគ ។

[10] ចំពោះ k = 2 យើងហៅថា ប្រព័ន្ធប៊ីនែរ (système de numération de base 2)

នោះ **(F2)** ទៅជា ៖

A= $257 + \frac{3}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{6}{10^4}$ = 257+0,3 + 0,00 + 0,008 + 0,0006 => **A= 257,3086** ។

អំណឹះតទៅចំពោះទ្រឹស្តីយើងនិយាយតែអំពីប្រព័ន្ធដេស៊ីមាល(système de base 10) តែគេក៏អាចផ្ទេរទៅប្រព័ន្ធផ្សេងឯទៀតបាន(système de base quelconque) ដោយមិនជាពិបាកខ្លាំងណាស់ណាទេ ។

3. សញ្ញាណនៃតម្លៃប្រហែល (Notion de valeur approchée)

និយមន័យ

ε សំដៅចំនួនវិជ្ជមាន ខុសពីសូន្យ គេថាចំនួន a ជាតម្លៃប្រហែលខ្វះនៃចំនួន x [ឬក៏ប្រហែលលើស នៃចំនួន x] យកត្រឹម ε បើកាលណា គេមាន វិសមភាព ទាំងពីរខាង គឺ៖ $a \leq x \leq a + \varepsilon$ [ឬក៏ $a - \varepsilon \leq x \leq a$][11] ។

បើ $\varepsilon = 10^{-n}$ នោះគេបានសញ្ញាណនៃតម្លៃប្រហែល នៃចំនួន x យកត្រឹម10^{-n} (ខ្វះ ឬលើស) ។

ដោយថាចំនួនដេស៊ីមាលអាចមានលេខច្រើនបន្ទាប់ពីកណ្តាក់សញ្ញា ហើយបើគេកាត់យកត្រឹមតែ ដេស៊ីមាលជួរ n នោះតម្លៃប្រហែល x_n នៃចំនួន x ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង វិសមភាព ៖

$$x_n \leq x \leq x_n + 10^{-n}$$

[11] ចូរចាំថា ក្នុងទីនេះ a ជាតម្លៃប្រហែល ហើយ x ជាតម្លៃត្រឹមត្រូវ តែដោយតម្លៃ x ទៅមិនដល់ គេបានតែតម្លៃ a ។

ហើយគេថា x_n ជាតម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល[12] យកត្រឹម 10^{-n} (x_n valeur décimale approchée à 10^{-n} *près* du nombre) ។

<u>*សង្កេត-1*</u>

យើងគួរបញ្ជាក់នូវ ពាក្យខ្លះ ដែលយើងធ្លាប់ប្រើដែរ ដូចជាពាក្យ ៖ លេខ ចំនួន តម្លៃ និមិត្តរូប ។

នៅក្នុងប្រព័ន្ធ ដេស៊ីមាល លេខមានតែ ដប់ គឺ ០ ១ ២ ៣ ៤ ៥ ៦ ៧ ៨ ៩ ហើយដោយ ដប់លេខនេះ គេអាចសរសេរបាន ចំនួន រាប់លាន រាប់កោដិ ចាប់តាំងពី ចំនួន សូន្យ ឡើងទៅ។ ដូចយើងមាន ព្យញ្ជនៈ តែជាង ៣០ អាចសរសេរបានពាក្យប្រើមិនអស់ ។ តើ តម្លៃ និងចំនួន ដូចគ្នា ឬ ខុសគ្នា ?

នៅក្នុង ឃ្លាខាងលើ គេសរសេរ៖

« **ហើយគេថា x_n ជាតម្លៃប្រហែល នៃចំនួន** x យកត្រឹម $\mathbf{10^{-n}}$ »

យើងឃើញថា ចំពោះ $\boldsymbol{x_n}$ គេប្រើពាក្យ តម្លៃ ហើយចំពោះ $\boldsymbol{x}$ គេប្រើពាក្យ ចំនួន ជាភាសា សាមញ្ញ ចំនួន និងតម្លៃ មានន័យដូចគ្នា តែក្នុងការគណនា រកតម្លៃ ជួនកាលគេទៅមិនដល់តម្លៃ ដែលស្មើនឹងចំនួនពិតនោះ នៅពេលនោះ តម្លៃ និង ចំនួន មិនស្មើគ្នាទេ គេដឹងតែតម្លៃប្រហែល នៃ ចំនួននពិតត្រឹមត្រូវ តែ គេក៏អាចដឹងជាមុនថា តម្លៃប្រហែល នឹងចំនួន ត្រឹមត្រូវ ឃ្លាតពីគ្នា មិនលើសពី 10^{-n} ទេ គឺ ថា

$|x_n - x| \leq \ 10^{-n}$ ។

<u>*ចុះអ្វីទៅនិមិត្តរូប*</u> ? (symbole) គឺរូបដែលគេប្រឌិត ដែលគេគួរសម្រាប់ជាតំណាងអ្វីមួយ ដូចជា √ ឬ π ជាដើម ។

<u>***សង្កេត-2***</u>

[12] បើយើងថាតម្លៃប្រហែល ដោយមិនបញ្ជាក់ នោះគឺថា តម្លៃប្រហែលខ្វះ

គេឲ្យ x = 21,45678

តាមការកត់ខាងលើ x_1 = 21,4 ; x_2 = 21,45 ; x_3 = 21,456 ; x_4 = 21,4567 ;

x_5 = 21,45647 (គឺមាន 5 ដេស៊ីមាល) ។

ចំពោះ n=3, x_n = 21,456 ហើយ x = 21,45678

គេអាចរក y_n ជាចំនួនគត់ តែមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង **(1)** $y_n \le 10^n x < y_n+1$

ហើយ តម្លៃប្រហែលនៃ x យកត្រឹម 10^{-n} គឺ $x_n = 10^{-n}y_n$ ។

ចំពោះ x = 21,45678 ហើយយើងយក n = 3 នោះ $10^n x = 10^3 \times (21,45678) = 21456,78$

(1) => $y_n \le 21456,78 < y_n+1$ => យើងគ្រាន់តែយក $y_n = 21456$ នោះ (1) ក៏

ផ្ទៀងផ្ទាត់ ហើយនៅពេលនោះ $x_n = 10^{-n}y_n$ => $x_3 = 10^{-3}(21456) = 21,456$ ដែលជា

ចំនួនដូចខាងដើមនៃ សង្កេត-2 ។

រួមសេចក្តីទៅ ដើម្បីរកតម្លៃប្រហែលខ្លះនៃ x យកត្រឹម 10^{-n} **យើងគ្រាន់តែទុកក្នុង x ចាប់ពីកណ្តក់សញ្ញាទៅ n លេខ** (ក្រៅពីនោះលេខបន្ទាប់ដែលនៅសល់ទាំងប៉ុន្មាន យើងលប់ទាំងអស់)។

សង្កេត-3

គួរកត់ចំណាំដែរ ថា តម្លៃប្រហែលយកត្រឹម 10^{-n} នៃ x អាចមិនឲ្យ n លេខ

ខាងផ្នែកដេស៊ីមាលនៃ x ជាចាំបាច់ទេ (la donnée d'une valeur approchée quelconque à 10^{-n}près, ne détermine pas nécessairement les n premières décimales du nombre x) ។

<u>ឧទាហរណ៍</u> ចំនួនដេស៊ីមាល 0,19999 ជាតម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម 10^{-5} នៃចំនួនដេស៊ីមាល 0,2 ពីព្រោះ $0,19999 + 10^{-5} = 0,19999 + 0,00001 = 0,2$ ។ តែចំពោះ ចំនួនទាំងពីរនេះ (0,19999 និង 0,2) ផ្នែកដេស៊ីមាល មិនស្មើគ្នាទេ។ ការសង្កេតនេះ មានសារសំខាន់ក្នុងការគណនាតម្លៃប្រហែល ។

<u>ប្រមាណវិធី លើតម្លៃប្រហែល</u> (Opérations sur les valeurs approchées)

យើងតាងដោយ a_1 តម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម ε_1 នៃចំនួន x_1

យើងតាងដោយ a_2 តម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម ε_2 នៃចំនួន x_2

នៅពេលនោះ ៖

ចំនួន $a_1 + a_2$ ជា តម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ នៃ $x_1 + x_2$

ហើយបើ a_1 និង a_2 ជាតម្លៃប្រហែល ដេស៊ីមាល[13] យកត្រឹម10^{-n} នៃ x_1 និង x_2 ផលបូក $a_1 + a_2$ ជាតម្លៃប្រហែល នៃ $x_1 + x_2$ យកត្រឹម 2.10^{-n} តែ $a_1 + a_2$ ពុំមែន ត្រូវតែជាតម្លៃប្រហែល <u>ដេស៊ីមាល</u> ឡើយ ។

ក៏ដូចគ្នា ដែរ ការឲ្យតម្លៃប្រហែល នៃ x_1 និង x_2 អាចឲ្យយើងរក តម្លៃប្រហែល នៃផលគុណ $x_1.x_2$ តែត្រូវតែប្រយ័ត្ន ចំពោះសញ្ញា នៃចំនួន <u>អវិជ្ជមាន</u>។ ដើម្បីចៀសវាងការច្រឡំ យើងរកតម្លៃប្រហែលនៃ <u>**ចំនួនវិជ្ជមាន**</u>សិនទៅ។ <u>តទៅនេះយើងសន្មត់ថា ចំនួនដែលយើងសិក្សាសុទ្ធតែជាចំនួន វិជ្ជមាន។</u>

បើ a_1 និង a_2 ជាចំនួនវិជ្ជមាន វិសមភាព ខាងក្រោមនេះ ៖

[13] ចំពោះ 10^{-n} តម្លៃប្រហែលនោះបានដោយ លប់ n លេខដេស៊ីមាល ចាប់ពីកណ្ដាក់សញ្ញាទៅ

$a_1 \leq x_1 \leq a_1 + \varepsilon$ និង $a_2 \leq x_2 \leq a_2 + \varepsilon$

=> $a_1.a_2 \leq x_1.x_2 \leq (a_1 + \varepsilon)(a_2 + \varepsilon)$

រឺ $a_1.a_2 \leq x_1.x_2 \leq a_1.a_2 + \varepsilon(a_1 + a_2 + \varepsilon)$ ដែលបង្ហាញថា $a_1.a_2$ ជាតម្លៃ

ប្រហែលខ្វះយកត្រឹម $\varepsilon(a_1 + a_2 + \varepsilon)$។ ហើយជាពិសេសផលគុណនៃតម្លៃប្រហែល ដេស៊ីមាលយកត្រឹម 10^{-n} នៃx_1និងx_2 កំណត់តម្លៃប្រហែលនៃផលគុណ $x_1.x_2$ តែតម្លៃប្រហែលនោះ ពុំត្រូវតែជា តម្លៃប្រហែលដេស៊ីមាល ឡើយ ។

ដោយសំអាង លើ គោលការណ៍ នៃ វិសមភាព ៖

$a_1 - b_2 \leq x_1 - x_2 \leq b_1 - a_2$

$a_1 \leq x_1 \leq b_1$ និង $a_2 \leq x_2 \leq b_2$ =>

⇨ ដូច្នេះយើងអាចរកតម្លៃប្រហែល នៃផលសង រវាងពីរចំនួន ។

ក៏ដូចគ្នាដែរ ការសិក្សាតម្លៃប្រហែល នៃលទ្ធផលលេខចែក(quotient de 2 nombres positifs) រវាងពីរចំនួន វិជ្ជមាន គឺពឹងផ្អែកទៅលើ វិសមភាព៖

$0 < a_1 \leq x_1 \leq b_1$ និង $0 < a_2 \leq x_2 \leq b_2$

ឲ្យ $\frac{a_1}{b_2} \leq \frac{x_1}{x_2} \leq \frac{b_1}{a_2}$ ដែលជាវិសមភាពមួយ ឲ្យតម្លៃប្រហែលនៃ $\frac{x_1}{x_2}$ ។

នៅទីបញ្ចប់ គេក៏អាចរកតម្លៃប្រហែល របស់ឬសការេនៃ ចំនួនដេស៊ីមាល ដោយ

សង្កេតនូវ វិសមភាព ៖ $\sqrt{a} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{a} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}}$

$0 < a \leq x \leq a + \varepsilon$ ផ្ដល់ឲ្យ ៖

ពីព្រោះ $a + \varepsilon = a(1 + \frac{\varepsilon}{a})$ =>

$(a + \varepsilon)^{1/2} = a^{1/2}(1 + \frac{\varepsilon}{a})^{1/2} = a^{\frac{1}{2}}[1 + \frac{1}{2}.\frac{\varepsilon}{a} + 0(\frac{\varepsilon}{a})] \cong \sqrt{a} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}}$ [14]

តែជាទូទៅ ផលចែក ឬ ឬសការនៃ ចំនួនដេស៊ីមាល មិនមែនជាចំនួន ដេស៊ីមាលទេ ។ បើយើង ចង់តែប្រើការតាងដោយដេស៊ីមាលនោះ យើងត្រូវតែសិក្សាអំពី <u>តម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល</u> នៃផលចែក ឬ ឬសការ (les valeurs décimales approchées des quotients et des racines carrées) ។ ហើយការនេះក៏នាំឲ្យយើង ចូលទៅដល់ « **ការពង្រីកដេស៊ីមាលដោយគ្មានទីបញ្ចប់** » (développements décimaux illimités) ។

<u>4. ការពង្រីកដេស៊ីមាល នៃផលចែក ឬ នៃឫសការ (Dévelop-pement décimal d'un quotient ou d'une racine carrée)</u>

<u>ផលចែក[15] យកត្រឹម 10^{-n}</u> (Quotient à 10^{-n} *près*)

គេដឹងថា របៀបធ្វើលេខចែក នៃចំនួនគត់ ពឹងផ្អែកទៅលើគោលការណ៍ខាងក្រោមនេះ ៖

<u>**ការស្នើ-VI-4-1**</u> (proposition-4-1).

បើ x សំដៅយក ផលចែក យកត្រឹម 1 នៃចំនួនគត់ a ចែកនឹង ចំនួនគត់ b

ចំនួនខ្ទង់ 10 នៃ x ជា ផលចែក យកត្រឹម 1 នៃចំនួនខ្ទង់10នៃ a ចែកនឹងចំនួន b **(le nombre de dizaines de x est le quotient à une unité près, par b, du nombre de dizaines de a)។**

---

[14] ចំពោះ mϵQ, $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n)$

[15] តទៅនេះ « ផលចែក » បានន័យថា លទ្ធផលលេខចែក (quotient de la division)

មុននឹងបញ្ជាក់នូវ ការស្មើ-VI-6 នេះ គួររំលឹកឡើងវិញ ទំនាក់ទំនង ក្នុងការធ្វើលេខៗ កាលណា គេចែក ចំនួន a នឹង ចំនួន b គេបាន លទ្ធផល q ហើយសំណល់ r បើសរសេរជា ទំនាក់ទំនង គេបាន ៖

$a = bq + r$ ដោយ $0 \leq r < b$ **(1)** ដែលសមមូលនឹង

$bq \leq bq + r < bq + b$ ពីព្រោះ $0 \leq r < b$

 រឺ $bq \leq \boldsymbol{a} < b(q+1)$ **(2)**

<u>រួមសេចក្តីទៅ</u> ក្នុងការចែក ចំនួន a នឹង ចំនួន b បើ q ជាលទ្ធផល ហើយ r ជា សំណល់ នោះ គេអាចសរសេរ ទំនាក់ទំនង ណាមួយខាងក្រោមនេះ ៖

$\boldsymbol{a = bq + r}$ ដោយ $0 \leq r < b$ **(F1)**
រឺ $\boldsymbol{bq} \leq \boldsymbol{a} < b(q+1)$ **(F2)**

ឥឡូវយើងត្រឡប់មកការបង្ហាញ នូវ ការស្មើ-VI-6-4-1 ៖

x ជា ផលចែក ចំនួន a និង ចំនួន b ដោយប្រើ (2) យើងបាន

$bx \leq a < b(x+1)$ (R1)

យើងតាង $x = 10x_1 + x_0$ (x_1 ជាចំនួនខ្ទង់ 10 នៃ x) និង $0 \leq x_0 \leq 9$ (R2)

$a = 10a_1 + a_0$ (a_1 ជាចំនួនខ្ទង់ 10 នៃ a) និង $0 \leq a_0 \leq 9$ (R3)

(R1) ទៅជា ៖

$$b(10x_1 + x_0) \leq 10a_1 + a_0 < b(10x_1 + x_0 + 1)$$

ដោយចែកជា ពីរ ៖

1/ $b(10x_1 + x_0) \leq 10a_1 + a_0 \Rightarrow 10\mathrm{b}x_1 + \mathrm{b}.x_0 \leq 10a_1 + a_0$

ដោយ $10.\mathrm{b}x_1 \leq 10\mathrm{b}x_1 + \mathrm{b}.x_0$ ដូច្នេះ $10.\mathrm{b}x_1 \leq 10a_1 + a_0 < 10a_1 + 10$ ដោយ(R3)

ដូច្នេះ $10.\mathrm{b}x_1 < 10a_1 + 10 \Rightarrow 10.\mathrm{b}x_1 < 10(a_1 + 1) \Rightarrow \mathrm{b}x_1 < a_1 + 1$

រឺ $\mathbf{b}.\boldsymbol{x_1} \leq \boldsymbol{a_1}$ **(R5)**

2/ $10a_1 + a_0 < b(10x_1 + x_0 + 1)$ => $10.a_1 < 10.b.x_1 + b.x_0 + b \leq 10.b.x_1 + b.9 + b$
ពីព្រោះ ដោយ (R2) $x_0 \leq 9$ ។

ដូច្នេះ $10.a_1 < 10.b.x_1 + b.9 + b$ ៖ $10.a_1 < 10.b.x_1 + 10.b = 10.b(x_1+1)$

 រឺ $\boldsymbol{a_1 < b(x_1 + 1)}$ **(R6)**

ដូច្នេះ (R5) និង (R6) បញ្ចូលគ្នា បាន $\mathbf{b.x_1 \leq a_1 < b(x_1 + 1)}$ ដោយ (2) ទំនាក់ទំនង នេះ បង្ហាញថា x_1 ជាផលចែករវាង [ចំនួនខ្ទង់10 នៃ a ចែកនឹង b] ដែលជា ការស្នើ-VI-4-1។

ផលចែកត្រឹមត្រូវ និង ផលចែកប្រហែល

ផលចែកត្រឹមត្រូវ ក្នុងការចែក ចំនួនសនិទាន a នឹងចំនួនសនិទាន b គឺ ជាចំនួន សនិទាន ។ ហើយគេថា ផលចែកប្រហែល យកត្រឹម 10^{-n} ក្នុងការចែក a នឹង b គឺ ជា តម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល យកត្រឹម 10^{-n} នៃចំនួនសនិទាន $\frac{a}{b}$ ។
ដើម្បីរកផលចែកប្រហែលនោះ គេត្រឡប់មករកក្នុងករណី a និង b ជាចំនួនគត់ ហើយ $b > 0$ នៅពេលនោះ ផលចែកប្រហែល យកត្រឹម 10^{-n} ក្នុងការចែកចំនួនគត់ a នឹង ចំនួនគត់ b គឺជាចំនួនដេស៊ីមាល $x_n = 10^{-n}y_n$ ហើយចំនួនគត់ y_n កំណត់ដោយ វិសមភាព $b.y_n \leq 10^n.a < b(y_n + 1)$ ។
ដោយ **(F2)** y_n ជាផលចែកប្រហែលយកត្រឹម 1 នៃ $10^n.a$ នឹង b ដូច្នេះ យើងមកដល់ ការចែកលេខជាធម្មតា[16]វិញ ។ **ការស្នើ-VI-4-1** បង្ហាញថា ចំនួនខ្ទង់ 10 នៃ y_{n+1} គឺ y_n ៖
ដូច្នេះគេបានជាបន្ទាប់បន្ត នូវចំនួន $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$

[16] គឺជាផលចែកជាចំនួនគត់ ពីព្រោះយកត្រឹម 1

មិនចេះចប់ ដោយរាល់លើក គេថែមសូន្យម្តងមួយៗនៅ ខាងស្តាំ a មុននឹងចែក តទៅទៀត ។

កាលណាយើងបាន ស្វ៊ីត (y_n) យើងក៏បានស្វ៊ីត (x_n) ដែរ ដោយ $x_n = 10^{-n}y_n$ ។ (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនដេស៊ីមាល ហើយ x_n អាចទាញយកពី x_{n+1} ដោយលុបដេស៊ីមាលទី $(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{\text{ième}}$ ។

(x_n) ជាស្វ៊ីតឡើង (une suite croissante)ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $x_n \le x_{n+1} < x_n + 10^{-n}$ ។

បើគេតាង $c_n = 10^n(x_n - x_{n-1})$

គេបាន ការពង្រីកដេស៊ីមាលនៃ x_n មានរាងជា ៖

$$x_n = x_0 + 0, c_1c_2\ldots\ldots c_n = x_0, c_1c_2\ldots\ldots c_n \quad \forall n$$

ដូច្នេះ យើងត្រូវតែរកប់រក « ការពង្រីកដេស៊ីមាលដោយគ្មានទីបញ្ចប់ » ហើយថាវាជា **ផលចែកត្រឹមត្រូវ ក្នុងការចែក a ដោយ b ។**

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យ $a = 83$ និង $b = 7$ ចូររក តម្លៃ ដេស៊ីមាលប្រហែល យកត្រឹម 10^{-3}

$n=3 \Rightarrow 10^n a = 10^3.83$

ចំនួនគត់ y_n កំណត់ដោយ វិសមភាព $b.y_n \le 10^n.a < b(y_n+1)$ ទៅជា ៖

$7y_3 \le 10^3.83 < 7(y_3+1)$ ។ ដោយ (F2) y_3 ជាផលចែកចំនួនគត់ $10^3.83$ នឹង 7 ។

ដោយធ្វើលេខចែកធម្មតា យើងបាន៖

83 ចែកនឹង 7 យកត្រឹម 10^{-3} $(n=3)$

83000	7
13	11857
60	
40	
50	
1	

y_n ជាផលចែក $10^n a$ នឹង b

$n=0$ y_0 ជាផលចែក a នឹង b $\Rightarrow y_0 = 11$

$n=1$ y_1 ជា - - - - $10a$ នឹង b $\Rightarrow y_1 = 118$

$n=2$ y_2 ជា - - - - $100a$ នឹង b $\Rightarrow y_2 = 1185$

$n=3$ y_3 ជា - - - - $1000a$ នឹង b $\Rightarrow y_3 = 11857$

$$x_n = 10^{-n} y_n$$

$n=0$ $x_0 = y_0 \Rightarrow x_0 = 11$

$n=1$ $x_1 = 10^{-1} y_1 \Rightarrow x_1 = 11,8$

$n=2$ $x_2 = 10^{-2} y_2 \Rightarrow x_2 = 11,85$

$n=3$ $x_3 = 10^{-3} y_3 \Rightarrow x_3 = 11,857$

ដើម្បី យល់នៃ **<u>ការស្មើ</u>-VI-4-1** ចូរមើលការធ្វើលេខចែកខាងលើនេះ ៖

1/ a = 83 ចែកនឹង b = 7 បាន ផលចែក x = 11

x = 11 => ខ្ទង់ជប់ នៃ x គឺ 1 ⎫ ការស្មើ-VI-4-1 ថា 1 ជាផលចែក 8 នឹង b = 7

a = 83 => ខ្ទង់ជប់ នៃ a គឺ 8 ⎭ ដូច្នេះត្រូវ ព្រោះ 8 ចែកនឹង 7 បាន 1

2/ a = 830 ចែកនឹង b = 7 បាន ផលចែក x = 118

x = 118=> ខ្ទង់ជប់ នៃ x គឺ 11 ⎫ ការស្មើ-VI-4-1 ថា 11 ជាផលចែក 83 នឹង b = 7

a = 830 => ខ្ទង់ជប់ នៃ a គឺ 83 ⎭ ដូច្នេះត្រូវ ព្រោះ 83 ចែកនឹង 7 បាន 11

តែ 83 ក៏ជា ចំនួន a ($a = 83$) ដូច្នេះ 11 ជាផលចែក x ($x = 11$) នៃ a ចែកនឹង b ។

3/ a = 8300 ចែកនឹង b = 7 បាន ផលចែក x = 1185

x = 1185=> ខ្ទង់ជប់ នៃ x គឺ 118 ⎫ ការស្មើ-VI-4-1 ថា 118 ជាផលចែក 830 នឹង b =7

$a = 8300$ => ខ្ទង់ជប់ នៃ a គឺ 830 ⎭ ដូច្នេះត្រូវ ព្រោះ 830 ចែកនឹង 7 បាន 118 ។

នៅក្នុង ឧទាហរណ៍នេះទៀត $\frac{83}{7}$ ជាចំនួនសនិទាន ហើយ 11,857 ជា តម្លៃដេស៊ីមាល ប្រហែល យកត្រឹម 10^{-3} នៃចំនួនសនិទាន $\frac{83}{7}$ ។

ឫសការេ យកត្រឹម 10^{-n}

ការរក ឫសការេ នៃចំនួនដេស៊ីមាល អាចទាញមករក ឫសការេនៃចំនួនគត់ ព្រោះថា គ្រប់ចំនួនដេស៊ីមាល អាចសរសេរជា ប្រភាគ ដែលមានភាគបែង ស្មើនឹង 10^{n} ដោយ n ជាចំនួនគូ ។ ហើយបើ $x = 10^{-2n}a$ គេបាន៖ $\sqrt{x} = 10^{-n}\sqrt{a}$ ដូច្នេះ បើគេដឹង $\sqrt{x}$ គេក៏ដឹង $\sqrt{a}$ ដែរ ។

ម្យ៉ាងទៀត បើ a ជាចំនួន គត់វិជ្ជមាន គេកំណត់ និយមន័យ នៃ ឫសការេខ្វះយកត្រឹម 1

នៃ a គឺជា **ចំនួនគត់ ធំជាងគេ ដែល មានការេ យ៉ាងធំបំផុត ស្មើនឹង a** ។
ចំនួន x នោះផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងវិសមភាព $x^2 \le a < (x+1)^2$ **(F3)** ។
យើងឃើញថា **(F3)** មានលំនាំ ប្រហាក់ប្រហែល នឹង (F2) ដែល កំណត់ ផលចែក ប្រហែល រវាង [ចំនួនគត់ a ចែកនិង ចំនួនគត់ b] ។ ក្បួនរកឫសការេ ដែលយើងធ្លាប់បានប្រើនៅអនុវិទ្យាល័យ បានពឹងផ្អែក ទៅលើការស្មើ-VI- ខាងក្រោមនេះ ដែលស្រដៀងនឹង ការស្មើ-VI-4-1 ដែរ ។

ការស្មើ-VI-4-2 (PropositionVI-4-2).

បើ x ជាឫសការេខ្វះ យកត្រឹម 1 នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន a នោះ ចំនួនខ្ទង់ដប់ នៃ x ជាឫសការេខ្វះ យកត្រឹម 1 នៃ ចំនួនខ្ទង់រយនៃ a ។

ឧទាហរណ៍ $x = \sqrt{625} = 25$ ដូច្នេះ $a = 625$ $x = 25$

$x = 25$ => ចំនួនខ្ទង់ដប់នៃ x គឺ 2

$a = 625$ => ចំនួនខ្ទង់រយនៃ a គឺ 6

ការស្មើ-VI-4-2 បានន័យថា $\sqrt{6}$ យកត្រឹម 1 ត្រូវស្មើនឹង 2

តើត្រូវទេ? បើយើងធ្វើលេខតាមរបៀបយើងបានរៀននៅអនុវិទ្យាល័យ យើងឃើញ ៖
$\sqrt{6} \cong 2{,}449489743$ => ឫសការេខ្វះ យកត្រឹម 1 នៃ $\sqrt{6}$ គឺ 2 [17] ដូច្នេះ
ការស្មើ-VI-4-2 នេះត្រូវ ។ ឥឡូវយើងត្រូវ បង្ហាញ ការស្មើ-VI-នេះ ។

ដើម្បី បង្ហាញ ការស្មើ-VI-4-2 នេះ យើងតាង $x = 10x_1+x_0$ ដោយ $0 \le x_0 \le 9$
វិសមភាព **(F3)** $x^2 \le a < (x+1)^2$ ទៅជា $100.x_1{}^2 \le a < (10x_1 + x_0 + 1)^2$

[17] យកត្រឹម 1 បានន័យថា បើមានខុស ចំនួនដែលខុសនោះ តូចជាង 1 ដូចជា $\sqrt{6} \cong 2{,}449489743$
បើយើងកាត់យក $\sqrt{6} \cong 2$ នោះចំនួនដែលខុសគឺ 0, 449489743 < 1 ។

ដោយ $x_0+1 \le 9+1 = 10$ គេបាន៖ $100.x_1^2 \le a < (10x_1+10)^2$

៖ $100.x_1^2 \le a < 100(x_1+1)^2 \Rightarrow x_1^2 \le \frac{a}{100} < (x_1+1)^2$ ។

បើយើងតាង a_1 = ចំនួនខ្ទង់រយនៃ a[18] នោះយើងបាន $x_1^2 \le a_1 < (x_1+1)^2$

វិសមភាពនេះបង្ហាញថា ៖ **x_1 ជាឫសការេ ខ្វះយកត្រឹម 1 នៃ a_1** ។ គឺថា ខ្ទង់ 10 នៃ x ជា ឫសការេខ្ទង់រយនៃ a ។

គេឲ្យ a ចំនួន គត់វិជ្ជមាន យើងតាងដោយ y_n ឫសការេខ្វះ យកត្រឹម 1 នៃ 10^{2n}a.

<u>តាមនិយមន័យ</u> **ចំនួនដេស៊ីមាល $x_n = 10^{-n}y_n$ ជាឫសការេខ្វះ យកត្រឹម 10^{-n} នៃ a ៖** គឺ ជាចំនួនដេស៊ីមាលធំជាងគេ ដែលមានយ៉ាងច្រើន n ដេស៊ីមាល ហើយ មានការេយ៉ាងធំស្មើនឹង a ។ ចំនួនដេស៊ីមាល នោះ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង៖ $x_n^2 \le a < (x_n+10^{-n})^2$ ។

អនុវត្តន៍<u>ការស្នើ-VI-4-2</u> ទៅលើ 10^{2n+2}a បង្ហាញយើងថា y_n ជាចំនួនខ្ទង់ដប់ នៃ y_{n+1} ដូច្នេះ x_n អាចទាញយកពី x_{n+1} ដោយលប់ លេខដេស៊ីមាល ទី $(n+1)$ ហើយដើម្បីបាន ស៊ីតនៃចំនួន y_n គ្មានទីបញ្ចប់ យើងគ្រាន់តែបន្តការ រកឫសការេ ដោយ បន្ថែមម្តងៗ ពីរសូន្យនៅខាងស្តាំ a ។

បើយើង សំដៅ ដោយ $x_0,c_1c_2c_3 \ldots\ldots.c_n$ ការពង្រីកដេស៊ីមាលនៃ x_n ការពង្រីកនេះក៏នាំឲ្យយើងរាប់បញ្ចូលថា ការពង្រីកដេស៊ីមាល <u>គ្មានទីបញ្ចប់</u>

$x_0,c_1c_2c_3 \ldots\ldots.c_n.\ldots.$ ជា <u>ឫសការេត្រឹមត្រូវ</u> នៃ a ។

<u>ការបកស្រាយលទ្ធផល ដោយឧទាហរណ៍</u>

1/ រកឫសការេនៃ u = 257,458 យកត្រឹម 1 នឹង យកត្រឹម 10^{-5}

ត្រូវ ដាក់ U ជា $10^{-2n}a$

[18] $a_1 = \frac{a}{100}$ ដូច្នេះបើ a = 25648 => a_1 = 256 ដែលជាចំនួនខ្ទង់រយនៃ a ។

u = 257,458 = 257458.10^{-3}= $\frac{257458}{10^3}$ = $\frac{2574580}{10^4}$ = $10^{-4}.257458 = 10^{-4}a$

$\sqrt{u} = \sqrt{10^{-4}a} = 10^{-2}\sqrt{a}$ ដោយ a = 257458

ដោយធ្វើលេខ យើងបាន $\sqrt{a} = \sqrt{257458} \cong 1604{,}549781$

ដូច្នេះ $\sqrt{u} = 10^{-2}\sqrt{a} \cong 16{,}04549781$ =>

យកត្រឹម 1 $\sqrt{u} \cong 16$

យកត្រឹម 10^{-5} $\sqrt{u} \cong 16{,}04549$

2/ រក ឫសការេ x នៃ $a = 2574580$

ដោយធ្វើលេខ យើងបាន $x = 1604{,}549781$

ចំនួនខ្ទង់ដប់ នៃ x គឺ x_1 = 160

ចំនួនខ្ទង់រយនៃ a គឺ $a_1 = 25745$

<u>ការស្នើ-VI-4-2</u> មានន័យថា ៖

$x = \sqrt{a}$ => $x_1 = \sqrt{a_1}$

$x_1 = \sqrt{a_1}$ => $x_1{}^2 = a_1$ គឺថា ដោយជាតម្លៃគត់ប្រហែល $x_1{}^2 \leq a_1 < (x_1+1)^2$ **(V1)**

តើ ត្រូវមែនទេ ?

x_1 = 160 => $x_1{}^2 = (160)^2$ = 25.600 និង $(x_1+1)^2 = (160+1)^2$=$(161)^2$= 25.921

a_1 = 25.745 => 25.600 ≤ 25.745 < 25.921 ដូច្នេះ (V1) ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

<u>ការស្នើ-VI-4-2</u> ក៏មានន័យថា ៖

ចំនួនខ្ទង់មួយ នៃ x គឺ 1604 ជាឫសការេ នៃ ចំនួនខ្ទង់មួយនៃ a គឺ 2574580 បានន័យ

ថា $(1604)^2 \leq 2.574.580 < (1604+1)^2$ **(V2)**

តើ ត្រូវមែនទេ ?

$(1604)^2 = 2.572.816$ និង $(1605)^2 = 2.576.025$ ដូច្នេះ (V2) ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ លទ្ធផលនេះ បង្ហាញថាចំនួនគត់ 1604 ជាឫសការេ យកត្រឹម 1 នៃចំនួនគត់ a = 2574580 ។ បើយើងចង់រកបន្តទៅទៀត ឫសការេនៃចំនួន a ដដែលនេះ ដូចបាន អធិប្បាយ រួចមកហើយ គឺថាមុននឹងបន្ត ការរកឫសការេផ្នែកដេស៊ីមាល យើងត្រូវគុណ ចំនួន a នឹង

$1/\ 10^2$ ដើម្បី បានលេខមួយខ្ទង់ បន្ទាប់ពី កណ្តក់សញ្ញា នៅក្នុងឫសការេ

$2/\ 10^4$ ដើម្បី បានលេខពីរខ្ទង់ បន្ទាប់ពី កណ្តក់សញ្ញា នៅក្នុងឫសការេ

$3/\ 10^6$ ដើម្បី បានលេខបីខ្ទង់ បន្ទាប់ពី កណ្តក់សញ្ញា នៅក្នុងឫសការេ

…………………………………………

$n/\ 10^{2n}$ ដើម្បី បានលេខ n ខ្ទង់ បន្ទាប់ពី កណ្តក់សញ្ញា នៅក្នុងឫសការេ ហើយ ឫសការេដែលបានមក ហៅថា ឫសការេខ្វះ យកត្រឹម 10^{-n} នៃ a ។

យើងបន្តឧទាហរណ៍ ខាងលើតទៅទៀត៖ គឺ

$a = 2574580$

$x = 1604,549781$ ជាឫសការេនៃ a ។

ដើម្បី បានលេខ ខ្ទង់ទី ១ បន្ទាប់ពីកណ្តក់សញ្ញា នៃ x គឺ 5 យើងត្រូវគុណ a នឹង 100 មុននឹងបន្តការរកឫសការេ តទៅទៀត ហើយយើងឃើញថា $a = 2574580$ នៅតែ ផ្ទៀងផ្ទាត់ វិសមីការ ដូចខាងក្រោមនេះ ៖

$$(1604{,}5)^2 \leq 2.574.580 < (1604{,}5 + 0{,}1)^2 \quad \text{(V3)}$$

ដោយធ្វើលេខ $(1604{,}5)^2 = 2.574.420{,}25$; $(1604{,}6)^2 = 2.574.741{,}16$

ដូច្នេះ (V3) ត្រូវ **ហើយគេថា $1604,5$ ជា ឫសការេខ្វះ យកត្រឹម 10^{-1} នៃ a ។**

សង្កេត

យើងគួរសួរដែរថាតើ ចំនួន $100a$ ទៅឯណាបាត់ទៅ? ព្រោះនៅក្នុង (V3) គឺ $a = 2574580$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ ចម្លើយ យើងឃើញ $100a$ =257.458.000 វិញ បើយើង កុំគិត កណ្ដាក់សញ្ញា ក្នុង (V3) គឺថា ៖

$$(16045)^2 \leq 257.458.000 < (16045+1)^2 \quad \text{(V4)}$$

ពីព្រោះ $(16045)^2$ = 257.442.025 ; $(16046)^2$ = 257.474.116

(V4) បង្ហាញថា $\sqrt{257.458.000} \cong 16.045$ ព្រោះថា ក្បួនរកឫសការេ មិនទាក់ទងនឹងកណ្ដាក់សញ្ញាទេ ។ ក្បួននោះទាក់ទង តែនឹងចំនួនគត់ ដែលបានបន្ទាប់ ពីលុបកណ្ដាក់សញ្ញា រឺក៏ថែមសូន្យខាងក្រោយចំនួន a ។

សេចក្ដីសន្និដ្ឋាន បន្ទាប់ពីបានសិក្សាអំពីការធ្វើលេខចែក និង ការរកឫសការេ មកឃើញថាក្នុងការធ្វើលេខទាំងពីរនេះ បើយើងចេះតែបន្តទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះនឹងឲ្យ **ការពង្រីកដេស៊ីមាលដោយគ្មានទីបញ្ចប់** (des développements décimaux illimités)។ ហើយក៏ជាការធម្មតាដែរ ដែលថា ការពង្រីកនេះនឹងឲ្យជា « ចំនួន » ។ ដោយការសង្កេតឃើញយ៉ាងនេះដោយការពិសោធន៍បែបនេះហើយ បានជាឥឡូវនេះ យើងចង់បង្ហាញលទ្ធផលនេះ ដោយសំអាងលើទ្រឹស្ដីម្ដង (nous proposons maintenant de justifier théoriquement) ដូចតទៅ។

នេះជាមតិផ្ទាល់របស់ខ្ញុំទេ មុននឹងបន្តទៅមុខទៀត៖

ក្នុងការស្រាវជ្រាវ (la recherche) គេច្រើនតែចាប់ផ្ដើមដោយយកលទ្ធផលបានមក

ពីការពិសោធន៍ មកសិក្សាដើម្បីទាញយកជាទ្រឹស្តី ឬ ជាក្បួនអាចប្រើបានជាទូទៅ មិនត្រឹមតែក្នុងស្ថានភាពនៃការពិសោធន៍នោះប៉ុណ្ណោះទេ ។ របៀបស្រាវជ្រាវបែបនេះ គេប្រើនជួបនៅក្នុងរូបសាស្ត្រ ។ ហើយអត្ថបទនេះ ក៏អាចទុកជា ឧទាហរណ៍មួយ ក្នុងដំណើរការស្រាវជ្រាវ ចំពោះលោកអ្នកដែលចង់បណ្តុះ គំនិត ស្រាវជ្រាវ ។

5. ការពង្រីកដេស៊ីមាលដោយគ្មានទីបញ្ចប់ (Développements décimaux illimités).

និយមន័យ

យើងហៅថា ការពង្រីកដេស៊ីមាលដោយគ្មានទីបញ្ចប់ សរសេរជាអក្សរកាត់ដោយ (**D.D.I.**) គឺជា ស្វ៊ីតអនន្ត នៃចំនួនគត់ $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ដែលមាន តួទីមួយ a_0 ជា ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ហើយតួបន្តបន្ទាប់ទៅទាំងអស់ a_i (i≥ 1) ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $0 \leq a_i \leq 9$ ។ **D.D.I.** កំណត់ដោយ ស្វ៊ីត (a_i) នឹងតាងដោយ **A**= $a_0, a_1 a_2 a_3 .. a_n \ldots$

ចំនួន a_0 ហៅថា **ផ្នែកគត់នៃ A** ហើយ ចំនួន a_n ($n \geq 1$) ហៅថា ***ដេស៊ីមាលជួរ n*** (décimale de rang n)។

ហើយមុននឹងបញ្ចប់ **ចំនួនដេស៊ីមាលរ៉ឺឡាទីប** (le nombre décimal relatif)

$$A_n = a_0, a_1 a_2 a_3 .. a_n = \sum_{i=0}^{n} 10^{-i} a_i$$

ជា តម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល លំដាប់ n នៃ A (valeur décimale approchée d’ordre n de A) ។

-បើ ចំពោះ $p > n$, គេមាន $a_p = 0$ នោះគេថា A[19] ជាតំណាង ចំនួនដេស៊ីមាល A_n ។

---

[19] កុំភ្លេចថា A ជា **D.D.I**

គួរកត់ថា ចំនួនដេស៊ីមាលធម្មតានីមួយៗ មានតំណាង **D.D.I**. តែមួយគត់ ដែល មាន ចំនួនដេស៊ីមាល ខុសពីសូន្យ មិនអនន្ត[20]។

ដូច្នេះ គេមាន ការត្រូវគ្នាប៊ីសេចទីវ (correspondance bijective)រវាង សំនុំD[21] នៃចំនួនដេស៊ីមាលធម្មតា និង សំនុំΔ_0[22] នៃ **D.D.I**. ដែលមានសូន្យច្រើនដល់អនន្តនៅខាងចុង។ សំនុំនៃ **D.D.I**. ទាំងអស់ នឹងតាងដោយ Δ ។

ទំនាក់ទំនងនៃលំដាប់ (Relation d'ordre).

ដើម្បីកំណត់ប្រមាណវិធី លើចំនួន **D.D.I**. យើងនឹងទុកថា ចំនួន **D.D.I** ជាលីមីតនៃស្វីតកើន នៃចំនួនដេស៊ីមាល (nous considérerons les DDI comme limites de suites croissantes de nombre décimaux). ។ ដូច្នេះយើងត្រូវកំណត់ជាមុននូវនិយមន័យរបស់ ទំនាក់ទំនងនៃលំដាប់ កំណត់លើ Δ ដោយថា ទំនាក់ទំនងនៃលំដាប់ នេះ ត្រូវគ្នានឹង ទំនាក់ទំនងនៃលំដាប់ កំណត់លើ Δ_0 កាលណា Δ_0 ដូចគ្នានឹង D ហើយនៅពេលនោះយើងយក ទំនាក់ទំនងនៃលំដាប់**ធម្មតា** លើ D មកកំណត់លើ Δ_0 ។

ដោយសំដៅជានិច្ច A_nជា តម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល លំដាប់ n នៃ A (ដោយ A ជា D.D.I.) យើងបាន ទំនាក់ទំនងនៃលំដាប់ លើ Δ ដោយសន្មត ថា ៖

$A \leq B$ បើកាលណាចំពោះ ចំនួន $n \in N$ ណាមួយក៏ដោយ, គេបាន $A_n \leq B_n$ **(R1)**

[20] ព្រោះ D.D.I អាចមានដេស៊ីមាល ខុសពីសូន្យ មានច្រើនរហូតដល់អនន្ត ក៏មានដែរ។

[21] D សំនុំនៃចំនួនទសភាគធម្មតាដែលយើងប្រើរាល់ថ្ងៃ ឧបមាដូចជា ចំនួន 3,14 ឬ 1250,034 ជាដើម ។

[22] D. D.I នៅក្នុង Δ_0 គឺ D.D.I. ដែលមានសូន្យនៅខាងចុង ច្រើនដល់អនន្ត ដូចជា 85,367000..000…..ជាដើម។

D. D.I នៅក្នុង Δ_9 គឺ D.D.I. ដែលមានលេខ 9 នៅខាងចុង ច្រើនដល់អនន្ត ដូចជា 5,367999…9999..ជាដើម។

ដោយប្រើ (R1) យើងត្រូវបង្ហាញថា ៖

1/ $A \leq A$ ជាទំនាក់ទំនងត្រូវ

$A \leq A$ => ចំពោះ ចំនួន $n\epsilon N$ ណាមួយក៏ដោយ គេបាន $A_n \leq A_n$ ។

ដោយ A_n ជាចំនួនផ្នែកដេស៊ីមាលធម្មតា អះអាងថា $A_n \leq A_n$ នេះត្រូវ ហើយក៏ត្រូវ $\forall n\epsilon N$ ទៀត ដូច្នេះ យើងក៏អាចសន្និដ្ឋានថា $A \leq A$ ត្រូវ ។ ចំពោះ ទំនាក់ទំនង $A \leq A$ នេះ គេហៅថា ទំនាក់ទំនង រេហ្វិចស៊ីវ (la relation est réflexive)

2/ $A \leq B$ និង $B \leq C$ => $A \leq C$

ដោយ $A \leq B$ => $A_n \leq B_n$, ដោយ (R1) ⎫ => $A_n \leq C_n$ នេះត្រូវ

ដោយ $B \leq C$ => $B_n \leq C_n$, ដោយ (R1) ⎭ ហើយក៏ត្រូវ $\forall n\epsilon N$ ដែរ ។

គឺថាយើងបាន $A \leq C$ ដូច្នេះ

[$A \leq B$ និង $B \leq C$ => $A \leq C$] ការអះអាងនេះត្រូវ ហើយគេហៅថាជា ទំនាក់ទំនង ត្រង់ស៊ីស៊ីវ (la relation est transitive) ។

3/ ចំពោះ ចំនួនផ្នែកដេស៊ីមាលធម្មតា ៖

$$\left.\begin{array}{l} A_n \leq B_n \\ B_n \leq A_n \end{array}\right\} \Rightarrow A_n = B_n \quad \forall n\epsilon N,$$

នោះយើងអាចទាញយកដោយ (R1), A = B

ដូច្នេះ $A \leq B$ ជា ទំនាក់ទំនងអង់ទីស៊ីមេទ្រិក (la relation est antisymétrique) ។

យើងសង្កេតថា $A_n \leq B_n$ => $A_p \leq B_p$ ចំពោះ $p < n$ ។

បើ $A \epsilon \Delta_0$ និង $B \epsilon \Delta_0$ នោះ A និង B ជាចំនួនដំណាងតែរៀងខ្លួន នៃចំនួនដេស៊ីមាល A_n និង B_n ដូច្នេះយើងឃើញថា

$A \leq B \Leftrightarrow A_n \leq B_n$	(R2)

តែ តើ ទំនាក់ទំនង $A \leq B$ ក្នុង (R2) នេះ ក៏នៅតែប្រើបានលើ សំនុំ Δ ដែរឬទេ ?

យើងឆ្លើយថាប្រើបានដោយ យើងឲ្យរបៀបសម្រាប់ ប្រៀបធៀប ពីរចំនួន D.D.I. ជាទូទៅ ៖

លក្ខណវិនិច្ឆ័យ ក្នុងការប្រៀបធៀប (Critère de comparaison).

គេឲ្យ $A = a_0,a_1a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ និង $B=b_0,b_1b_2 \ldots\ldots\ldots b_n \ldots\ldots$ ពីរ D.D.I. ជាទូទៅ។ ដើម្បីថា $A > B$ ត្រូវតែនិងគ្រាន់តែ មានចំនួនគត់ n មួយដែលធ្វើឲ្យ $a_n > b_n$ និង $a_i = b_i$ ចំពោះ $i < n$ ។

លក្ខណវិនិច្ឆ័យនេះបាន ពីក្បួនដែលយើងធ្លាប់តែប្រើក្នុងការប្រៀបធៀបពីរចំនួនផ្នែកដេស៊ីមាល។ គេក៏អាចថា ពីរចំនួន D.D.I. មិនស្មើគ្នា កាលណាក្នុងការប្រៀបធៀបដេស៊ីមាលនិងដេស៊ីមាល មានចំនួនដេស៊ីមាលណាមួយខុសពីគ្នាជាលើកដំបូង ហើយនៅពេលនោះ យើងក៏អាចប្រៀបធៀបនឹងគ្នានូវចំនួន D.D.I. ទាំងពីរនោះ ។ ដោយរបៀបនេះ យើងអាចប្រៀបធៀបពីរចំនួន D.D.I. ជាទូទៅ ។ ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនង $A \leq B$ ជាទំនាក់ទំនងនៃលំដាប់ទាំងអស់ (relation d’ordre totale)[23] ។

អនុវត្តន៍

1/ យើង ថាសូន្យ (0) គឺ D.D.I. ដែល តួទាំងអស់ សុទ្ធតែសូន្យ ៖ កំណត់ដោយ $a_i = 0$, $\forall i$;

ហើយគេឲ្យចំនួន D.D.I. មួយ $A = a_0,a_1a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$

ទំនាក់ទំនង $A \geq 0$ សមមូលនឹង $a_0 \geq 0$ ។ ផ្ទុយទៅវិញ បើ $a_0 \geq 0$ នោះយើងថា A វិជ្ជមាន ។ ក៏ដូចគ្នាដែរ យើងថា A អវិជ្ជមាន កាលណា វា ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង ទំនាក់ទំនង $A \leq 0$; ហើយយើងសង្កេតថា $A < 0$ សមមូលនឹង $a_0 < 0$ [24]។

---

[23] បានន័យថា បើគេឲ្យពីរចំនួន D.D.I., A និង B គេអាចប្រៀបធៀប ពីរចំនួននេះជានិច្ច គឺថាគេអាចសរសេរ៖ $A \leq B$ ឬ $A \geq B$ ឬ $A = B$ ។

[24] ចូរមើល §2-ការសរសេរចំនួនទសភាគរឺឡាទីប (nombre décimaux relatifs) មួយបែបទៀត ។

2/ ចំនួន D.D.I. A = $a_0, a_1 a_2 \ldots\ldots a_n \ldots$ គឺជាចំនួនតូចបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងទំនាក់ទំនង $A \geq A_n, \ \forall n$: តាមនិយមន័យគោលទាល់លើ (borne supérieure) A ជា គោលទាល់លើនៃ ចំនួនដេស៊ីមាល $A_n = a_0, a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$,($\forall n$) ទាំងអស់ ។

យើងសង្កេតថា ស៊ីត A_n ជាស៊ីតកើន ហើយ A ជាចំនួន D.D.I. តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $A_n \leq A < A_n + 10^{-n}$ <u>ចំពោះចំនួន n នីមួយៗ</u> ។ នេះក៏ឲ្យឃើញកាន់តែត្រូវនូវឈ្មោះថា <u>A_n ជាចំនួនដេស៊ីមាល ប្រហែល</u> ។

<u>ស៊ីតគ្មានប្រែប្រួល (suite monotone).</u>

យើងធ្លាប់ដឹងមកហើយ ស៊ីតកើន ឬ ស៊ីតចុះ តែស៊ីតគ្មានប្រែប្រួល គឺថា បើកើន គឺកើនរហូតៗទៅ ឥតមានប្រែលប្រួល ហើយបើចុះគឺចុះ រហូតៗទៅ ឥតមានប្រែលប្រួល ។

គេឲ្យ ស៊ីត (A^α) កំណត់ដោយតួ ៖

$A^\alpha = {a_0}^\alpha, {a_1}^\alpha {a_2}^\alpha \ldots\ldots\ldots {a_n}^\alpha \ldots\ldots (\ \alpha = 1,2, \ldots., p, \ldots)$ ជា D.D.I ។

គេថា ស៊ីត (A^α)នេះ កើន [ឬចុះ] បើកាលណា ∀α គេបាន $A^{\alpha+1} \geq A^\alpha$ [ឬ $A^{\alpha+1} \leq A^\alpha$] ;

គេថា ស៊ីត (A^α)នេះ ដំឡើង (suite majorée)[ឬ បញ្ចុះ] (suite minorée) បើកាលណាមានលេខផ្នែកដេស៊ីមាលគ្មានទីបញ្ចប់ B មួយ ដែលគេបាន $A^\alpha \leq B$ [ឬ $A^\alpha \geq B$] , ∀α ។

ឥឡូវគេឲ្យ (A^α) ស៊ីតកើន នៃ D.D.I. ដំឡើងដោយ $B = b_0, b_1 \ldots\ldots b_n \ldots$

ដូច្នេះ ស៊ីតនៃចំនួនគត់ a_0^α[25] ចាំបាច់ត្រូវជាស៊ីតកើន ហើយមាន b_0ជាចំនួនដំឡើង ។ យើងសួរថាតើ ស៊ីត (a_0^α) កើនរហូតបានទេ ? ឬក៏នៅ «នឹង » មិនប្រែប្រួល នៅពេលណាមួយ ? ឆ្លើយថា ដោយ a_0^α ត្រូវតូចជាង b_0 ($a_0^\alpha \leq b_0$) ∀α , ដូច្នេះ a_0^α មិនអាចកើនឲ្យហួស b_0 ទេ ។ វាត្រូវតែឈប់កើននៅពេលណាមួយ បានន័យថា វា

---

[25] យើងធ្លាប់តែឃើញ ស៊ីត (u_n) ដោយ n ជាអថេរ (n = 0, 1, 2,….,p,…)

នៅពេលនេះគឺ ស៊ីត $({a_0}^\alpha)$ មាន α ជាអថេរ (α= 0, 1, 2,….,p,…) គឺស៊ីត : ${a_0}^1, {a_0}^2, {a_0}^3, \ldots., {a_0}^\alpha, \ldots.$

ត្រូវតែនៅនឹងចាប់ពី ចំនួន α ណាមួយទៅ ។ ដូច្នេះ គេថា (a_0^α) ជា ស៊ីតគ្មានប្រែប្រួល ។ សំនុំ E_0 នៃចំនួន a_0^α ជាសំនុំ នៃចំនួនគត់រឺឡាទីប[26] នៅក្នុងចន្លោះ $(a_0^1\ ;\ b_0)$ ដូច្នេះ E_0 ជាសំនុំកំណត់ ហើយបើគេតាង $a_0{}^{\alpha_0} = a_0$ ជាធាតុធំជាងគេនៅក្នុង E_0 នៅពេលនោះ គេបាន $a_0{}^{\alpha} = a_0$ ចំពោះ $\alpha \geq \alpha_0$ ។

ចាប់ពី $\alpha \geq \alpha_0$ ដោយស៊ីត (A^α) កើន នោះគេបាន $A^{\alpha+1} \geq A^\alpha$ ដែលបណ្តាលឲ្យ $a_1^{\alpha+1} \geq a_1^\alpha$ ។ រួមសេចក្តីទៅ ចាប់ពី $\alpha \geq \alpha_0$ ស៊ីត (a_1^α) ជាស៊ីតកើន តែដោយ a_1^α ជា ដេស៊ីមាល នោះ $0 \leq a_1{}^\alpha \leq 9$, $\forall\alpha$ ។ ដោយ ស៊ីត $(a_1{}^\alpha)$ កើន ហើយតួនីមួយៗ យកតម្លៃបានតែពី 0 ទៅ 9 នោះត្រូវតែនៅពេលណាមួយ តួទាំងនោះត្រូវតែឈប់កើន ហើយនៅ នឹង ដដែល ។ យើងតាងដោយគូ $(a_1\ ;\ \alpha_1)$ ចំនួន ដែល $\alpha \geq \alpha_1$ ឲ្យ $a_1{}^\alpha = a_1$ ។

ដោយបកស្រាយដូចខាងលើ គេបង្ហាញថា ចំពោះ $\alpha \geq \alpha_1$ ស៊ីត $(a_2{}^\alpha)$ កើន ហើយដោយតួទាំងអស់ ធំបំផុតត្រឹម 9 ដូច្នេះស៊ីតនេះ ក៏ជាស៊ីតគ្មានប្រែប្រួលដែរ ចាប់ពី $\alpha \geq \alpha_2$ ។ ដូច្នេះគេក៏បានគូ $(a_2\ ;\ \alpha_2)$ ដែល $\alpha \geq \alpha_2$ ឲ្យ $a_2{}^\alpha = a_2$ ។

ហើយដោយ វេគារ៉ងលើ n (récurrence sur n)[27] គេបានគូ $(a_n\ ;\ \alpha_n)$ ដែល $\alpha \geq \alpha_n$ ឲ្យ $a_n{}^\alpha = a_n$ ។

រួមសេចក្តីទៅបើ

[26] $a_0{}^\alpha$ ចំនួនគត់រឺឡាទីប ដូចជា -12, -11, -10,…..,2, 3,….,… ជាស៊ីតកើន ពី $\alpha = 1$ ឡើងទៅ ហើយគ្មានប្រែប្រួល ពី $\alpha \geq \alpha_0$ ឡើងទៅ ។

តែចំពោះ $a_1{}^\alpha$ ចំនួនគត់វិជ្ជមាននៅចន្លោះ (0 ; 9) ដូចជា 0,1,5, 4, 3, ….2,3,4,….,7,8,8,8,….. ជាស៊ីតកើន ពី $\alpha \geq \alpha_0$ ឡើងទៅរហូតដល់ α_1 ហើយគ្មានប្រែប្រួល ពី $\alpha \geq \alpha_1$ ឡើងទៅ ។

[27] វេគារ៉ងលើ n គឺជារបៀបបង្ហាញមួយ ដែលដោយការសង្កេតឃើញថា « ទំនាក់ទំនងមួយ » ត្រូវ ចំពោះ n = 1 នោះគេក៏ពង្រីកថាវា ក៏នៅតែត្រូវ ចំពោះ តម្លៃ n ឯទៀតៗដែរ រហូតដល់ n ទៅអនន្ត ។

បើស៊ីត (A^{α}) កើន ហើយដំឡើង B នោះ គេអាច ផ្គួ វា (on associe) ជាមួយនឹងចំនួន ដេស៊ីមាលគ្មានទីបញ្ចប់ A = $a_0, a_1a_2 \ldots \ldots \ldots a_n \ldots\ldots$

ដែលជា ចំនួនដេស៊ីមាល តូចជាងគេ ក្នុងចំណោមចំនួនផ្នែកដេស៊ីមាលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $A \geq A^{\alpha}$,

$\forall\alpha$ ពីព្រោះថា បើគេឲ្យ n $(n \in N)$ គេក៏បាន α_n ដែល $\alpha \geq \alpha_n$ ឲ្យ $A_n{}^{\alpha} = A_n$[28] ។

ម្យ៉ាងទៀត $B \geq A^{\alpha}$ តម្រូវឲ្យ $B_n \geq A_n^{\alpha}$ ។ ដោយថា $B \geq A^{\alpha}$ គ្រប់តម្លៃ α ដូច្នេះគេ ក៏បាន $B_n \geq A_n, \forall n,$ គឺថា $B \geq A$ ។

ការស្នើ-VI-5-1.

បើ A^{α} ជាស៊ីត កើន និងមានD.D.I. ដំឡើង (majoré) នោះគេមាន ចំនួនផ្នែកដេស៊ីមាលគ្មានទីបញ្ចប់ A មួយ និងស៊ីតចំនួនគត់ α_n ដែលចំពោះ $\alpha \geq \alpha_n$ គេបាន $A_n^{\alpha} = A_n$ ។ A ជា D.D.I. គោលទាល់លើ (la borne supérieure) នៃ ចំនួន A^{α} ទាំងអស់ ហើយគេនឹងតាង ដោយ $A = sup_{\Delta}(A^{\alpha})$ ។

<u>គឺការពន្យល់បន្ថែមនូវ ស៊ីត (A^{α}) នៃ D.D.I ដោយប្រើតារាង</u>

$$A^{\alpha} = a_0{}^{\alpha}, a_1{}^{\alpha} a_2{}^{\alpha} \ldots \ldots . a_n{}^{\alpha} \ldots \ldots (\alpha = 1,2, \ldots ., p, \ldots .)$$

ស៊ីត (a_0^{α}) ស៊ីត (a_1^{α})

តួទី1នៃស៊ីតA^{α}

	តម្លៃ n									
តម្លៃ	A_n^{α}	0	1	2		n	n+1			$+\infty$
	$\alpha=1$	a_0^1	a_1^1	a_2^1		a_n^1	a_{n+1}^1	…	…	
	$\alpha=2$	a_0^2	a_1^2	a_2^2		a_n^2	a_{n+1}^2	…	…	

[28] $A_n = a_0, a_1a_2 \ldots \ldots \ldots a_n$

តួទី2នៃស៊ីតA^{α}

	....	...	...	...	..	..	...	...	..	
	$\alpha = \alpha_0$	$a_0^{\alpha_0} = a_0$	$a_1^{\alpha_0}$	$a_2^{\alpha_0}$		$a_n^{\alpha_0}$	$a_{n+1}^{\alpha_0}$	....	....	
		a_0	$a_1^{\alpha_0+1}$	..	..	..	..	..	..	
		a_0								
α	$\alpha = \alpha_1$	...	$a_1^{\alpha_1}=a_1$			$a_n^{\alpha_1}$				
		...	a_1							
	$\alpha = \alpha_2$	a_0	a_1	$a_2^{\alpha_2}=a_2$		$a_n^{\alpha_2}$			...	
		..	...	...		..	...	...	...	
	A	a_0	a_1	a_2		a_n	a_{n+1}			
	B	b_0	b_1	b_2		b_n	b_{n+1}			
	$+\infty$									

សង្កេត

ចំពោះតារាងខាងលើ យើងឃើញ $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ ហើយ មកដល់ α_2 យើងឃើញ

$a_0^{\alpha_2} = a_0$ $a_1^{\alpha_2} = a_1$ $a_2^{\alpha_2} = a_2$ => $A_2^{\alpha_2} = a_0, a_1 a_2$ ហើយ ចំពោះ $\alpha \geq \alpha_2$

$A_2^{\alpha} = a_0, a_1 a_2$ ។ ដោយ $A_2 = a_0, a_1 a_2$ ដូច្នេះយើងបាន

ចំពោះ $\alpha \geq \alpha_2$, $A_2^{\alpha} = A_2$ (R1) នេះជាលទ្ធផល ចំពោះ $n = 2$។ ដូច្នេះ ចំពោះ n **(R1)**

ទៅជា ៖ **ចំពោះ $\alpha \geq \alpha_n$, $A_n^{\alpha} = A_n$** ។

$B \geq A^{\alpha}$ => $[\, B_n \geq A_n^{\alpha}\, ,\ \forall \alpha\,]$ => $[\, B_n \geq A_n\, ,\ \forall n\,]$ => $B \geq A$ ។

គេក៏បានដូច ការស្នើ-VI-5-1. ដែរដោយផ្ទុយ A^α ជាស៊ីត កើន មានD.D.I. ជំឡើង (majoré) មកជា A^α ជាស៊ីតចុះ មាន D.D.I. បញ្ចុះ (minoré) នៅពេលនោះ ស៊ីត A^α មានគោលទាល់ក្រោម (la borne inférieure) A ដែលគេ នឹងតាងដោយ $A = inf_{\Delta}(A^\alpha)$ ។

ហើយ A ជា D.D.I. ដែលធំជាងគេក្នុងពពួក D.D.I. ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $A \le A^\alpha, \forall\alpha \in N$ (គឺថា Aយ៉ាងធំបំផុត ស្មើនឹងតួ A^α ចំពោះតម្លៃα ណាក៏ដោយ)។

<u>ការស្នើ</u>-VI-5-2.

បើ A^α និង B^α ជាស៊ីត កើនទាំងពីរ ទាល់លើទាំងពីរ ដោយ D.D.I. និងចំពោះតម្លៃ α នីមួយៗ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងទំនាក់ទំនង $A^\alpha \le B^\alpha$ ហើយបើគេតាងដោយ $A = sup_{\Delta}(A^\alpha)$ និង $B = sup_{\Delta}(B^\alpha)$ <u>នៅពេលនោះ</u> គេបាន៖ $A \le B$ ។

បានន័យថា៖

$$\left.\begin{array}{l} A^\alpha \le B^\alpha \\ A = sup_{\Delta}(A^\alpha) \text{ និង } B = sup_{\Delta}(B^\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow A \le B$$

ដោយប្រើ ការស្នើ-VI-5-1. (ពីព្រោះ ស៊ីតA^α និង B^α កើននិងទាល់លើ) ដូច្នេះ យើងអាចរកស៊ីតនៃចំនួនគត់ α_n ដែលចំពោះ $\alpha \ge \alpha_n$ យើងបាន <u>ទាំងពីរ</u>[29] $A_n^\alpha = A_n$ និង $B_n^\alpha = B_n$។

ដូច្នេះ ចំពោះ តម្លៃn នីមួយៗ គេបាន $A_n \le B_n$ គឺថា $A \le B$ ។

---

[29] ចូរមើលតារាងខាងលើ ចំពោះ n = 0 យើងបានα_0 , ចំពោះ n = 1 យើងបានα_1 , នេះចំពោះស៊ីត A^α ។ ឥឡូវ មានស៊ីតដល់ទៅពីរ គឺ A^α និង B^α ដូច្នេះ ដើម្បី ញែក $(\alpha_0, \alpha_{1,..})$នៃស៊ីត A^α ចេញពី $(\alpha_0, \alpha_{1,..})$ នៃស៊ីត B^α នោះយើង សន្មតតាង α^A ជា α ប្រើចំពោះស៊ីត A^α និង α^B ជា α ប្រើចំពោះស៊ីត B^α ។ ដោយ ស៊ីតពីរ អាចខុសគ្នា ដូច្នេះ $\alpha_0^A \neq \alpha_0^B$, $\alpha_1^A \neq \alpha_1^B$ ។ ដូចយើងឃើញនៅតារាងខាងលើស្រាប់ហើយ បើយើងតាងស៊ីត A^α និងស៊ីតB^α ដោយ $A^\alpha = a_0{}^\alpha, a_1{}^\alpha a_2{}^\alpha \ldots\ldots. a_n{}^\alpha \ldots\ldots (\alpha = 1,2,\ldots.,p,\ldots)$

$B^\alpha = b_0{}^\alpha, b_1{}^\alpha b_2{}^\alpha \ldots\ldots. b_n{}^\alpha \ldots\ldots (\alpha = 1,2,\ldots.,p,\ldots)$ នោះ ចំពោះ A^α ៖

α_0^A គឺជា ចំនួនគត់ ដែល ចំពោះ $\alpha \ge \alpha_0^A$ ធ្វើឲ្យ a_0^α មិនប្រែប្រួល (ឧបមា $a_0^\alpha = 235$) នេះចំពោះ n = 0

α_1^A គឺជាចំនួនគត់ ដែល ចំពោះ $\alpha \ge \alpha_1^A \ge \alpha_0^A$ ធ្វើឲ្យ a_1^α មិនប្រែប្រួល (ឧបមា $a_1^\alpha = 5$)នេះចំពោះ n = 1

បន្ទាប់ទៅនេះ យើងអាចសិក្សា តែក្នុង D.D.I. ដូចជាកំណត់ពិធី បូក A+B នៃពីរ D.D.I. គឺជា គោលទាល់លើ នៃស្វ៊ីតកើន A_n+B_n ។ យើងឃើញថា ពិធីបូកនេះ មានលក្ខណៈ ត្រលប់ (commutative) ហើយគេក៏អាចថា វាមានមានលក្ខណៈ ផ្តុំដែរ (associative)។ តែចំពោះលក្ខណៈ ផ្តុំ បើកាលណាយើងពង្រីកឲ្យវែងឆ្ងាយ នោះអាចជួបនូវចំណោទ្យ ដែលពុំអាច ឲ្យយើង យក D.D.I. ជា ចំនួនទូទៅ នៃចំនួនផ្នែកដេស៊ីមាលបាន (des anomalies qui nous empêcher de considérer les D.D.I. comme une bonne généralisation de la notion de nombre réel)។

ឧទាហរណ៍ដូចតទៅនេះ៖

1/ ពិធីបូក នៃ D.D.I. ដែលមិនត្រូវនឹងក្បួនសម្រួល(règle de simplification) ៖

ឧបមាដូចជា : **0,9999…..+ 0,1111**…….. = 1,1111….. = **1 + 0,1111…** បង្ហាញឲ្យ ឃើញថា ទំនាក់ទំនង A+C = B+C មិនឲ្យ A = B ទេ ដូច្នេះ យើងក៏ពិបាកនឹង កំណត់ឲ្យច្បាស់នូវ ពិធីសង នៃ ពីរ D.D.I. ដែរ។

2/ គេពុំអាចរក D.D.I. ដែលនៅចន្លោះ ពីរ D.D.I. ដូចជា 1 និង 0,9999…….. (មើលការស្នើ-VI-6-1.) ។

3/ - ចំនួន D.D.I. A = $\bar{1}$,9999….. បំពេញ ទំនាក់ទំនង A+A =A ដូច្នេះ nA = A បើគេ

ហើយចំពោះ B^{α} ៖

α_0^B គឺជា ចំនួនគត់ ដែល ចំពោះ $\alpha \geq \alpha_0^B$ ធ្វើឲ្យ b_0^{α} មិនប្រែប្រួល (ឧបមា $b_0^{\alpha} = 201$) នេះចំពោះ n = 0

α_1^B គឺជាចំនួនគត់ ដែល ចំពោះ $\alpha \geq \alpha_1^B \geq \alpha_0^B$ ធ្វើឲ្យ b_1^{α} មិនប្រែប្រួល (ឧបមា $b_1^{\alpha} = 7$)នេះចំពោះ n = 1

តើយើងត្រូវយក α_0ប៉ុន្មាន ដើម្បី ឲ្យ a_0^{α} និង b_0^{α} មិនប្រែប្រួលទាំងពីរ គឺយើងយក $\alpha_1 = \sup(\alpha_1^A, \alpha_1^B)$ ។ តាមនិយមន័យ របស់ ពាក្យ sup គឺ ក្នុងពពួកចំនួនដែលនៅក្នុងរង្វង់ក្រចក គេយកចំនួនណាដែលធំជាងគេបង្អស់ ឧបមា ៖ sup(5,2,7,4) = 7 ។

កំណាត់ nA គឺជាផលបូក នៃ A n ដង ។

ដូច្នេះ សំនុំ D.D.I. មិនជាប់ទេ ដូច្នេះ មិនបំពេញ **ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ** ។

ភាពពិបាកនេះ មកពីមាន D.D.I. ដែលនៅខាងចុង មានលេខ 9 គ្មានទីបញ្ចប់ ។ គេមិនជួប នឹង D.D.I. បែបនេះទេ បើកាលណាគេធ្វើលេខចែក ឬ រកឫសការេ បើសិនគេមិនប្រទ្បំ យកលេខតូចពេក នៅពេលចែក ឬពេលរកឫសការេ ។ ដូច្នេះយើងរករបៀបយ៉ាងណា ដើម្បីបំបាត់ <u>ការពង្រីកដេស៊ីមាលប្លែក</u> នេះ ហើយនៅពេលនោះនឹងបាន សញ្ញាណនៃចំនួនពិត (la notion de nombre réel) ។

6. <u>ការពង្រីកសមមូលគ្នា - សញ្ញាណនៃចំនួនពិត</u>

<u>(Développements équivalents. Notion de nombre réel).</u>

<u>ការកត់ត្រា</u> **(Notation)**

កាលពីមុនយើងបានតាងដោយ Δ_0 សំនុំ D.D.I. ដែលមានលេខផ្នែកដេស៊ីមាល <u>ខុសពីសូន្យ</u> មានចំនួនកំណាត់[30]។ ហើយក៏ដូចគ្នា យើងតាងដោយ Δ_9 សំនុំ D.D.I. ដែលមានលេខផ្នែកដេស៊ីមាល <u>ខុសពី 9</u> មានចំនួនកំណាត់[31] ។

B = $b_0, b_1 \ldots . b_n \ldots \ldots$ ជាធាតុមួយក្នុង Δ_9 ។ យើងតាងដោយ n ចំនួនគត់តូចជាងគេ ដែលឲ្យ $i > n$, $b_i = 9$ ។

ដូច្នេះ បើ n = 0 នោះ $i > n$, $b_i = 9$ ទៅជា $i > 0$, $b_i = 9 \Rightarrow b_1 = 9, b_2 = 9, \ldots .$

គឺ B = b_0,9999………

បើ n = 1 នោះ $i > n$, $b_i = 9$ ទៅជា $i > 1$, $b_i = 9 \Rightarrow b_2 = 9, b_3 = 9, \ldots .$

[30] បានន័យថា D.D.I.ក្នុង Δ_0 មាន ដេស៊ីមាល <u>ស្មើនឹង 0</u> មានចំនួនច្រើនដល់អនន្ត ។

[31] បានន័យថា D.D.I.ក្នុង Δ_9 មាន ដេស៊ីមាល <u>ស្មើនឹង 9</u> មានចំនួនច្រើនដល់អនន្ត ។

គឺ B = b_0,$b_1$999………

បើ n = n នោះ $i > n$, $b_i = 9$ ទៅជា $i > n$, $b_{n+1} = 9$, $b_{n+2} = 9$,….

គឺ B = b_0,$b_1$$b_2$….$b_n$999999 ……

ហើយ ចំពោះ B នេះ យើងនឹងតម្រូវជាមួយនឹង $\bar{B}$ ជាតុនៃ Δ_0 កំណត់ដោយ ៖

$\bar{b_i} = b_i$ ចំពោះ $i < n$; $\overline{b_n} = b_n + 1$; $\bar{b_i} = 0$ ចំពោះ $i > n$

$$\begin{array}{ccc} \Delta_9 & \longrightarrow & \Delta_0 \\ B & \rightarrow & \bar{B} \end{array}$$

ដោយប្រាសមកវិញ បើ A ជាជាតុនៃ Δ_0 នោះមាន ជាតុ B តែមួយគត់ក្នុង Δ_9 ដែល $A = \bar{B}$ ។ ព្រោះថាបើ $A = a_0,a_1a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ ហើយ បើ n ជាចំនួនគត់តូចជាងគេ ដែល $i > n$ ឲ្យ $a_i = 0$ នោះ យើងអាចយក B កំណត់ដោយ៖

$b_i = a_i$ ចំពោះ $i < n$; $b_n = a_n - 1$; $b_i = 9$ ចំពោះ $i > n$ ។ ដូច្នេះ អនុគមន៍

$B \longrightarrow \bar{B}$ ជា <u>ការអនុវត្តន៍ប៊ីសេចទីវ</u> ពី Δ_9 ទៅ Δ_0 (application bijective de Δ_9 sur Δ_0) ហើយគេថា <u>B និង $\bar{B}$ សមមូលនឹងគ្នា</u> (B et $\bar{B}$ sont équivalents). ។

<u>និយមន័យ</u>

ជាទូទៅ យើងថា ពីរ D.D.I. សមមូលនឹងគ្នា កាលណា វាស្មើគ្នា ឬ វាជាជាតុផ្គូគ្នារវាង Δ_0 និង Δ_9 ។ ឬក៏ថា យើងនឹងដាក់ជា $A \equiv B$ បើកាលណា ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ណាមួយ ក្នុងល័ក្ខខ័ណ្ឌ ទាំងបីខាងក្រោមនេះ បំពេញ ៖

1/ $A = B$ 2/ $A = \bar{B}$ 3/ $\bar{A} = B$

យើងឃើញថា គេបាន <u>ទំនាក់ទំនងសមមូល</u> (relation d'équivalence) លើ Δ ហើយគេអាចឲ្យនិយមន័យ « **ចំនួនពិត** » ថាជា <u>ថ្នាក់សមមូល</u> (classe d'équivalence) នៃ <u>ទំនាក់ទំនងសមមូល</u> ខាងលើនេះ ។ តែ ទំនាក់ទំនងសមមូលនេះ ដូចជាពិសេសពេកយើងអាចរកងាយជាងនេះ ហើយស្រួលអនុវត្ត ដោយដាក់ជានិយមន័យដូចតទៅ ៖

និយមន័យ

គេថា « **ចំនួនពិត** » គឺ D.D.I. ដែលមានលេខដេស៊ីមាលច្រើនអនេកអនន្ត ខុសពី 9 ។

សំនុំ R នៃចំនួនពិត គឺជា « សំនុំបំពេញនៃសំនុំ Δ_9 នៅក្នុងសំនុំ Δ » គឺថា $R = \Delta - \Delta_9$ ។ ធាតុនៃ Δ_0 ទៅជាដូចគ្នានឹង ចំនួនទសភាគជាគូ ហើយ ធាតុនៃ Δ_9 នឹងរាប់ជាដំណាង មិនធម្មតា នៃចំនួនទសភាគជាគូ ។

បើយើងវិលមកមើលក្នុងប្រពន្ធដេស៊ីមាល(système décimale) នោះ ចំនួនពិតមានពីរពួក ៖

1/ ចំនួន ទសភាគ ធម្មតា ដែលនីមួយៗ មានដំណាងដល់ទៅពីរ ក្នុង D.D.I. គឺ ដំណាងមួយនៅក្នុង Δ_0 ហៅថាស្មើជ្រុង (régulier) និងដំណាងមួយទៀត នៅក្នុង Δ_9 ហៅថា មិនស្មើជ្រុង (irrégulier) ។

2/ ចំនួនទសភាគ គ្មានទីបញ្ចប់ ដែលតាងដោយ D.D.I. តែមួយគត់ ហើយមិននៅក្នុង Δ_0 និង មិននៅក្នុង Δ_9 ។

ទំនាក់ទំនងនៃលំដាប់ (relation d'ordre)

ដោយ R នៅក្នុង Δ ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនងនៃលំដាប់ ដែលមាននៅក្នុង Δ ក៏នាំឲ្យមាន ទំនាក់ទំនងនៃលំដាប់ក្នុង R ដែរ ។ ដូច្នេះ ការប្រៀបធៀប ក៏នៅតែប្រើបានក្នុង R ដែរ ។ តែយើងត្រូវការ ប្រៀបធៀប នូវចំនួនពិត ដែលនៅក្នុងនោះ មានចំនួន D.D.I.មិនទៀងទាត់ ។ ដូច្នេះជាដំបូង យើងដាក់ការស្នើ-VI-មួយ ដូចតទៅ ៖

ការស្នើ-VI-6-1

***A* ជាធាតុមួយក្នុង Δ_9 ហើយ *B* ជា D.D.I. មួយជាទូទៅ នោះទំនាក់ទំនង $B > A$ សមមូលនឹង $B \geq \bar{A}$ ។**

ព្រោះថា យើងតាង A = $a_0,a_1a_2a_3\ldots\ldots a_n999999\ldots\ldots\ldots$ (ដោយ $a_n \neq 0$ ឬ n = 0) ជាជាតុក្នុង Δ_9 ហើយ $\bar{A} = a_0,a_1a_2a_3\ldots\ldots(a_n+1)00000\ldots\ldots$ ជាជាតុក្នុង Δ_0 គូនឹង A ។

ទំនាក់ទំនង $B > A$ => មានចំនួនគត់ p ដែល i < p ឲ្យ $b_i = a_i$ និង $b_p > a_p$ ។

ចំនួនគត់ p ត្រូវតែ p ≤ n ព្រោះថា ចំពោះ i > n នោះ $a_i = 9$ ហើយ $b_i \leq a_i$

ដូច្នេះ ចំពោះ p = n និង p > n[32] គេនៅតែបាន $B \geq \bar{A}$ ។

ច្រាស់មកវិញ ដោយ $\bar{A}$ > A នោះ $B \geq \bar{A}$ => $B > A$ ។

រួមសេចក្តីទៅ B > A ⇔ B ≥ $\bar{A}$ ។

សេចក្តីស្មើនេះ មានន័យថា ពុំមាន D.D.I. ណាមួយនៅក្នុងចន្លោះ A និង $\bar{A}$ ចំពោះ A ∈ Δ_9 ។

<u>អនុសាធ្យ</u> **(Corollaire)**[33]

បើ A' និង B' ជាចំនួនពិត តាងរៀងៗខ្លួន ដោយ D.D.I. (ស្មើជ្រុង ឬ មិនស្មើជ្រុង) A និង B នោះ ទំនាក់ទំនង $A \geq B$ => A' ≥ B' ។

<u>តម្លៃប្រហែល</u> (valeurs approchées)

បើ A ជាចំនួនពិត យើង<u>តាងជានិច្ច</u> ដោយ A_n តម្លៃប្រហែលនៃA យកត្រឹម 10^{-n} គឺជាចំនួនប្រហែល បានមកពី A ដោយ លុបគ្មានសល់ នូវដេស៊ីមាល ដែលនៅ<u>ជួរធំជាង n</u> ហើយ យើងបានជានិច្ច នូវវិសមភាព $A_n \leq A < A_n + 10^{-n}$ ។

ជាទូទៅ យើងថា ចំនួនទសភាគ C_n ជា តម្លៃប្រហែលនៃ A យកត្រឹម 10^{-n} កាលណាវាផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង វិសមភាព $C_n - 10^{-n} \leq A \leq C_n + 10^{-n}$ ។ ហើយយើងនឹង

---

32 ពីព្រោះចំពោះ $\bar{A}$, $a_i = 0$ ចំពោះ i > n

33 គឺជាការស្មើ-VI- ដែលទាញចេញពីការស្មើ-VI-មួយទៀត

ឃើញថា ចំនួនពិតនឹងកំណត់ កាលណាគេឲ្យ ចំពោះតម្លៃ n នីមួយៗ នូវតម្លៃប្រហែល យកត្រឹម 10^{-n} ។

ការស្នើ-VI-6-2

ដើម្បីឲ្យចំនួនពិតពីរ A និង B ស្មើគ្នា នោះគ្រាន់តែ ចំពោះតម្លៃ n នីមួយៗ ចំនួនពិតទាំងពីរនោះ មានតម្លៃប្រហែល យកត្រឹម 10^{-n} តែមួយ ។

ឧបមា ថាចំពោះ ចំនួន n មួយ គេមានចំនួនទាភាគ C_n ដែលបំពេញ ព្រមគ្នា ៖

$C_n - 10^{-n} \leq A \leq C_n + 10^{-n}$ (1)

និង $C_n - 10^{-n} \leq B \leq C_n + 10^{-n}$ (2)

ដោយប្រើតម្លៃប្រហែល យើងមាន៖

$A_n \leq A < A_n + 10^{-n}$ (3)

$B_n \leq B < B_n + 10^{-n}$ (4)

បំណងយើងគឺ បង្ហាញថា $A = B$ ដោយប្រើ (1), (2), (3), (4) ។ ហើយដើម្បីថា $A = B$ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $A_n = B_n \ \forall n \in N$ ។ យើងនឹងបង្ហាញដូចតទៅ ៖

(3) និង (1) ឲ្យ ៖ $A_n \leq A$ និង $A \leq C_n + 10^{-n}$ ដូច្នេះ $\boldsymbol{A_n \leq C_n + 10^{-n}}$ (5)

(4) និង (2) ឲ្យ ៖ $B_n + 10^{-n} > B$ និង $B \geq C_n - 10^{-n}$ ដូច្នេះ

$B_n + 10^{-n} > C_n - 10^{-n} \Rightarrow B_n + 10^{-n} + 2.10^{-n} > C_n - 10^{-n} + 2.10^{-n}$

រឺ $B_n + 3.10^{-n} > C_n + 10^{-n} \Rightarrow B_n + 3.10^{-n} > A_n$ ដោយ (5)

$B_n + 3.10^{-n} > A_n \Rightarrow B_n + 10.10^{-n} > A_n$ រឺ $B_n + 10^{-n+1} > A_n$

រឺ $\boldsymbol{B_n + 10^{-(n-1)} > A_n}$ **(6)** ។ ដោយនៅក្នុង R ចំនួនទាំងអស់អាចរៀបតាមលំដាប់បាន យើងអាចឧបមាថា $A \geq B \Rightarrow A_n \geq B_n$ ហើយដោយ (6) យើងបាន

$\boldsymbol{B_n \leq A_n < B_n + 10^{-(n-1)}}$ **(7)**

យើងចង់បង្ហាញថា ដោយ (7) យើងអាចសន្និដ្ឋានថា $A_n = B_n \ \forall n \in N$

យើងតាង $A_n = a_{0,}a_1 \dots \dots \dots a_i \dots . a_{n-1}a_n$

$B_n = b_{0,}b_1 \dots\dots\dots b_i \dots . b_{n-1}b_n$

ដូច្នេះ $B_n + 10^{-(n-1)} = b_{0,}b_1 \dots\dots\dots b_i \dots .(b_{n-1}+1)b_n$

កំណត់ថា $\mathrm{N} = \left\{ 0, 1, 2, \dots\dots\dots, n, \dots\dots\dots \right\}$

ដូច្នេះពី b_0 ទៅដល់ b_{n-1} ត្រូវមាន n តួ b_i

បើ $b_{n-1} \neq 9$ នោះ $(b_{n-1}+1) \leq 9$ ដូច្នេះ b_{n-2} អត់មានផ្លាស់ប្តូរទេ បានន័យថា តួ របស់ B_n និង $B_n + 10^{-(n-1)}$ ស្មើគ្នា ពី b_0 រហូតដល់ b_{n-2} ។ ដោយ A_n អមដោយ B_n និង $B_n + 10^{-(n-1)}$ [ពីព្រោះ (7)] នោះចំពោះ $i < n-1$ យើងត្រូវបាន $a_i = b_i$ ។ ហើយដោយ B ជាចំនួនពិត (គឺថា ជាធាតុនៃ Δ - Δ_9) ដូច្នេះ សំនុំ នៃចំនួន n ដែលឲ្យ $b_{n-1} \neq 9$ មិនមានគោលទាល់លើ ដូច្នេះ យើងក៏បាន $a_i = b_i$,$\forall i$ ដែរ (ពីព្រោះបើ n មិនកំណត់ ដូច្នេះ $i < n-1$ ក៏មិនកំណត់ដែរ)។ រួមសេចក្តីទៅ $A = B$ ៕

<u>នេះជាការពន្យល់បន្ថែម</u> (អាចលោតរំលងទៅទំព័របន្ទាប់ក៏បាន)

1/ បើ ពីរចំនួនស្មើគ្នា នៅអមចំនួន x នោះតើ x ស្មើនឹងចំនួនប៉ុន្មាន? ឆ្លើយថាស្មើនឹងចំនួនអម ។ <u>ឧទាហរណ៍</u> $5 \leq x \leq 5 \Rightarrow x = 5$

2/ នៅក្នុងចំនួនទសភាគ ៖ $B_n = b_{0,}b_1 \dots\dots\dots b_i \dots . b_{n-1}b_n$

$b_0 =$ ជាផ្នែកគត់ ហើយ $0, b_1 \dots\dots\dots b_i \dots . b_{n-1}b_n$ ជាផ្នែកដេស៊ីមាល និង b_i (i = 1, 2, 3, ……, n) មួយៗ ហៅថា ដេស៊ីមាល ។ ឧទាហរណ៍៖

ចំនួន **253,43679** ឲ្យ $b_0 = 253$ ហើយ 0,43679 ជាផ្នែកដេស៊ីមាល និង $b_1 = 4, b_2 = 3, b_3 = 6, b_4 = 7, b_5 = 9$ ។

3/ ហេតុអ្វីក៏ចាំបាច់ ឲ្យ $b_{n-1} \neq 9$ នៅក្នុង $B_n \leq A_n < B_n + 10^{-(n-1)}$

ដើម្បីងាយយល់ យើងត្រឡប់មកមើលឧទាហរណ៍ 253,43679 ។ បើយើងតាង $B_n = 253{,}43679$ នោះ n = 5 ហើយចំពោះ ផ្នែកដេស៊ីមាន 0,43679 គេអាចសរសេរ ៖

$0{,}43679 = 4.10^{-1} + 3.10^{-2} + 6.10^{-3} + 7.10^{-4} + 9.10^{-5}$

$=0,4 + 0,03 + 0,006 + 0,0007 + 0,00009$ [34]

ហើយវិសមភាព $B_n \leq A_n < B_n + 10^{-(n-1)}$ ទៅជា $B_5 \leq A_5 < B_5 + 10^{-(5-1)}$

រឺ $B_5 \leq A_5 < B_5 + 10^{-4}$ ទៅជា $253,43679 \leq A_5 < 253,43679 + 0,0001$

បានន័យថា ដេស៊ីមាល 7 ត្រូវបូកនឹង 1 ឬ $b_4 + 1$ ហើយបើ $b_4 = 9$ នោះ $b_4 + 1 = 10$ ដូច្នេះ b_3 ត្រូវ ថែម 1 បានន័យថា តួ b_3 ផ្លូវ ។ តែបើ $b_4 \neq 9$ នោះ $b_4 + 1 < 10$ ដូច្នេះ b_3 នៅដដែល ។ ហើយបើត្រឡប់ មករក n វិញ ៖ $b_4 = b_{n-1}$ ហើយដោយ b_3 មិនដូរ នោះ បានន័យថា b_i នៅក្នុង B_n និង នៅក្នុង $B_n + 10^{-(n-1)}$ មិនដូរ ចំពោះ $i < n-1$ នេះ បើយើងមើលទៅតាមវិសមភាព $B_n \leq A_n < B_n + 10^{-(n-1)}$ ។ រឺនិយាយម្យ៉ាងទៀត ចំពោះ $i < n-1$, $B_n = B_n + 10^{-(n-1)} \Rightarrow A_i = B_i$, ចំពោះ $i < n-1$ ។

ហើយទីបញ្ចប់ក៏បាន A = B ។

ឥឡូវ ត្រឡប់មកមេរៀនតទៅទៀត ៖

សង្កេត

1/ គេនៅតែបាន $A = B$ បើសិនជាមាន ចំនួនគត់ k ហើយនិងស៊ីត C_n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ព្រមគ្នា នូវវិសមីការ ទាំង២ ខាងក្រោមនេះ ៖

$$C_n - k.10^{-n} \leq A \leq C_n + k.10^{-n} \quad (a)$$

$$C_n - k.10^{-n} \leq B \leq C_n + k.10^{-n} \quad (b) \text{ ។}$$

ដោយ k ជាចំនួនគត់ គេអាចរក p ដែលឲ្យ $k \leq 10^p$ ដូច្នេះ យើងអាសេរសេរ

$k.10^{-n} \leq 10^p.10^{-n}$ រឺ $k.10^{-n} \leq 10^{-n+p}$

---

[34] ជាទូទៅ ៖

$\mathbf{0, b_1 \ldots\ldots\ldots b_i \ldots. b_{n-1} b_n} = b_1 10^{-1} + \cdots + b_i 10^{-i} + .. + b_{n-1} 10^{-(n-1)} + b_n 10^{-n}$

ដើម្បី បាន 10^{-n} ក្នុង (a) ឬ (b) យើងត្រូវយក C_{n+p} ពីព្រោះ C_{n+p} ជាតម្លៃប្រហែលនៅខ្ទង់ (n+p) គឺជាយកត្រឹម $10^{-(n+p)}$ => $k.10^{-(n+p)} \leq 10^{p}.10^{-(n+p)} = 10^{-n}$

ដូច្នេះ (a) និង (b) ទៅជា ៖

$$C_{n+p} - 10^{-n} \leq A \leq C_{n+p} + 10^{-n} \quad (a')$$

$$C_{n+p} - 10^{-n} \leq B \leq C_{n+p} + 10^{-n} \quad (b')$$

ដែលបង្ហាញថា C_{n+p} ជាចំនួនប្រហែល យកត្រឹម 10^{-n} នៃចំនួនពិតទាំងពីរ A និង B ។

2/ ការស្មើ-VI-6 -2 នេះត្រូវតែចំពោះចំនួនពិត គឺ D.D.I. ដែលនៅក្នុង $\Delta - \Delta_9$ បានន័យថា ចំពោះ D.D.I. នៅក្នុង Δ_9 នោះមិនត្រូវទេ។ ឧបមា យើងយក A ណាមួយក្នុង Δ_9 ហើយ $\bar{A}$ ជាចំនួនផ្ទុ របស់វាក្នុង Δ_0 នោះយើងបាន (ធ្លាប់បានឃើញរួចមកហើយ) ៖

(V) $\bar{A} - 10^{-n} < A < \bar{A}$, $\forall n$ ដែលបង្ហាញថា $\bar{A}$ ជាតម្លៃប្រហែល យកត្រឹម 10^{-n} ។

បើតាម ការស្មើ-VI--VI-2 យើងត្រូវបាន $A = \bar{A}$ ។ ឥឡូវយើងយក

A = 14,657999999999….99999 => $\bar{A}$ = 14,6580000….0000000

នៅពេលនេះ n = 3 ដូច្នេះ 10^{-3}= 0,001 =>

$\bar{A} - 10^{-3}$ = $\bar{A}$ = 14,658000...00000 – 0,001=14,657000….000000

ហើយ វិសមីការ (V) ឲ្យ៖

14,657000….000000 < 14,657999999999….99999 < 14,6580000….0000000 **(V-1)**

<u>វិសមីការនេះត្រូវ</u> តែ 14,657999999999….99999 ≠ 14,6580000….0000000

នេះមកពី នៅក្នុង 14,657999999999….99999 មានដេស៊ីមាល 9 ច្រើនពេករាប់មិនអស់ ! ។ ដើម្បី ការស្មើ-VI-6-2 ត្រូវ ទាល់តែដេស៊ីមាល 9 មានតិច គឺថា ដេស៊ីមាលខុសពី 9 មានច្រើនរហូតដល់អនន្ត ។ យើងគ្រាន់តែមើល ឧទាហរណ៍ខាងលើ បើយើងជំនួស 999….99 ដោយដេស៊ីមាលខុសពី 9 (គឺថា n > 3) ឧបមា n = 10 នោះ **(V-1)** ទៅជា

14,65712345670 0...0000 < 14,6571234567 99….99999 < 14,6571234568 000….000 **(V-2)**

យើងឃើញថា A និង $\bar{A}$ ស្មើគ្នា រហូតដល់ n -1 = 10 – 1 = 9 ។ ចុះបើ n → +∞ (ចំពោះ A មិននៅក្នុង Δ_9) នោះ A និង $\bar{A}$ ស្មើគ្នា រហូតដល់ n -1 → +∞ ។ គឺថា $A = \bar{A}, \forall n$ ។

ស្វីតកើននៃចំនួនពិត

គេឲ្យ A^{α} ស្វីតកើន និងទាល់លើ នៃចំនួនពិត គឺថាជាធាតុនៃសំនុំ $\Delta - \Delta_9$។ យើងតាងដោយ $A = sup_{\Delta}(A^{\alpha})$ ជាគោលទាល់លើ នៅក្នុង Δ នៃស្វីត[35] A^{α}

បើ $A \not\subset \Delta_9$ យើងអាចថា ចំនួនពិត A គឺជា គោលទាល់លើ នៃស្វីត A^{α} នៅក្នុង R ក៏ដូចនៅក្នុង Δ ។ បើ A នៅក្នុង Δ_9 នោះដោយ ការស្មើ-*VI-6-1* យើងអាចថា $\bar{A}$ ជាចំនួនពិត មួយតូចដែល យ៉ាងហោចណាស់ ក៏ស្មើនឹង តួទាំងអស់របស់ស្វីត ។ យកងអាចថា៖

ការស្មើ-VI-6-3

បើ (A^{α}) ជា ស្វីត កើន និង ទាល់លើ នៃចំនួនពិត នោះសំនុំ នៃចំនួន A^{α} មានគោលទាល់លើនៅក្នុង R ។ គោលទាល់លើនេះ ដែលយើងនឹងតាងដោយ $sup_R(A^{\alpha})$ មានដំណាងគឺ D.D.I. $sup_{\Delta}(A^{\alpha})$ ។

7. វិធីបូក នៃចំនួនពិត (Addition des nombres réels).

និយមន័យ

A= a_0, a_1 ………………… និង B= b_0, b_1 ……….… ជាចំនួនពិតទាំងពីរ (គឺថាជាធាតុនៃ $\Delta - \Delta_9$) យើងបង្កំ ចំពោះចំនួន n មួយ នូវការបូក $A_n + B_n$ ដែលជាចំនួនប្រហែលយកត្រឹម 10^{-n} ។ ស្វីត $A_n + B_n$ ជាស្វីត កើន ទាល់លើដោយ a_0+b_0+2[36] ។

---

[35] មើល ការស្មើ-VI-5-1

[36] ដោយ 0, a_1 ………………… < 1 ដូច្នេះ A= a_0, a_1 ………………… < a_0+1

តាមនិយមន័យ គោលទាល់លើ ក្នុង R នៃស៊ីតនេះ នឹងហៅថា ផលបូកនៃចំនួន A និង B ហើយគេតាងដោយ A+B ។

ក្នុងករណីដែល A និង B ជាចំនួនទសភាគ (គឺជាចំនួន ក្នុង Δ_0) យើងបាន ចំពោះ n ធំគ្រាន់បើដែរនោះ $A = A_n$ និង $B = B_n$ ។ ដូច្នេះ $\sup(A_n + B_n) = A + B$ ៖ យើងឃើញឡើងវិញនូវ ផលបូកនៃចំនួនទសភាគ ។ ដូច្នេះ ក្នុងនិយមន័យនេះ វិធីបូកក្នុង R នៃចំនួនពិត ក៏ជាវិធីបូកក្នុង Δ_0 នៃចំនួនទសភាគដែរ ។

ការស្នើ-VI-7-1

វិធីបូកនៃ ចំនួនពិត មានលក្ខណៈត្រលប់ ។

ដោយថា ផលបូក A+B និង B+A គឺ រៀងៗខ្លួន កំណត់ដោយស៊ីត A_n+B_n និង B_n+A_n ហើយដោយ វិធីបូកនៃចំនួនទសភាគ មានមានលក្ខណៈត្រលប់ នោះគេបាន $A_n+B_n = B_n+A_n$ ។ ដូច្នេះ ស៊ីតទាំងពីរ A_n+B_n និង B_n+A_n មានគោលទាល់លើស្មើគ្នា គឺថា A+B = B+A ។

ការស្នើ-VI-7-2

ចំនួនពិត សូន្យ ជា ធាតុ នប៉ុសកលិង្គ (élément neutre) នៃ វិធីបូក ហើយចំនួនពិតនីមួយៗ មានចំនួនផ្ទុយ ។

ជាដំបូង យើងឃើញច្បាស់ក្រឡែតថា លេខបូក មាន ជាតុនប៉ុសកលិង្គ គឺ ចំនួនទសភាគសូន្យ ដែលជា D.D.I. មានលេខ សុទ្ធតែសូន្យ ។ ម្យ៉ាងទៀត ចំនួនទសភាគនីមួយៗ សុទ្ធមានតែមាន ចំនួនទសភាគផ្ទុយ ។

ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែ បង្ហាញថា មាន ចំនួនផ្ទុយ នៃចំនួនពិត ដែលមិនមែនជាចំនួនទសភាគ គឺថា ជាចំនួន មិននៅក្នុង Δ_0 និង Δ_9 (គឺចំនួន អសនិទាន) ។ បើ $A = a_0 , a_1 a_2$………………… ជាចំនួន D.D.I.របៀបនោះ យើងបាន D.D.I. A' របៀបនោះដែរ ដោយយើងតាង៖

$a'_0 = -1 - a_0$ និង $a'_i = 9 - a_i$ ចំពោះ $i \geq 1$ **(F1)** ហើយផលបូក $A_n + A'_n$ គឺចំនួនទសភាគ $\bar{1},9999…9 = -10^{-n}$ ដែលសរសេរ ដោយ n ដេស៊ីមាលស្មើនឹង 9 ។ គោលទាល់លើ នៃផលបូក $A_n + A'_n$ គឺជាចំនួនទសភាគ ដំណាងដោយ D.D.I. មិននឹងន៏ (représenté par un D.D.I. irrégulier) $\bar{1},9999$…….. គឺ សូន្យ ហើយយើងក៏បាន A + A' = 0 ។

<u>*ឧទាហរណ៍*</u> គេឲ្យ A= 2,4263 ដោយប្រើ **(F1)** យើងរក A'

A = 2,4263 => a_0=2 ; a_1=4 ; a_2=2 ; a_3=6 ; a_4=3 ;

$a'_0 = -1 - a_0$ => a'_0 = -1-2 = -3

$a'_i = 9 - a_i$ ចំពោះ $i \geq 1$ => $a'_1 = 9 - 4 = 5$; $a'_2 = 9 - 2 = 7$; $a'_3 = 9 - 6 = 3$;

$a'_4 = 9 - 3 = 6$ ។

ដូច្នេះ A' = $\bar{3}$,5736 ហើយ A+A' = 2,4263 + $\bar{3}$,5736 = $\bar{1}$,9999 = -10^{-4} ។

<u>ការស្នើ</u>-VI-7-3

បើ A, B, C ជាចំនួនពិត វិសមភាព $A \leq B$ នាំឲ្យ $A + C \leq B + C$ ។

បើ A_n, B_n, C_n ជា រៀងៗខ្លួន តម្លៃដេស៊ីមាល ប្រហែល យកត្រឹម លំដាប់ n នៃ A,B,C វិសមភាព $A \leq B$ ផ្តល់ឲ្យ $A_n \leq B_n$ ដូច្នេះ $A_n + C_n \leq B_n + C_n$ ។

បើយើងតាង $\alpha = sup_{\Delta}(A_n + C_n)$ និង $\beta = sup_{\Delta}(B_n + C_n)$ នោះដោយ ការស្នើ-VI--V-2

យើងបាន $A+C \le B+C$ ។ ពីព្រោះ $A+C$ និង $B+C$ ជាចំនួនពិត ដែលរៀងៗខ្លួន តាងដោយ D.D.I. α និង β ។

ការអនុវត្តន៍

ដោយប្រើ ការស្មើ-VI-7-3 ពីរដង យើងបានចំពោះ វិសមភាព ខាងក្រោមនេះ៖

$A_n \le A < A_n + 10^{-n}$ និង $B_n \le B < B_n + 10^{-n}$ =>

$A_n + B_n \le A + B < A_n + B_n + 2.10^{-n}$

ដូច្នេះ ផលបូកនៃ $A_n + B_n$ ជាតម្លៃប្រហែល ខ្វះ យកត្រឹម 2.10^{-n} នៃផលបូក $A+B$ ។

ការស្មើ-VI-7-4

វិធីបូក ចំនួនពិត មានលក្ខណៈ ផ្តុំ (associative) ។

យើងតាងដោយ A_n, B_n, C_n តម្លៃ ដេស៊ីមាលប្រហែល យកត្រឹមលំដាប់ n នៃ បីចំនួនពិតជម្មតា A, B,C ដោយប្រើ**ការស្មើ**-VI-7-3 វិសមភាព ខាងក្រោមនេះ ៖

$$A_n \le A < A_n + 10^{-n} \quad (1)$$

$$B_n \le B < B_n + 10^{-n} \quad (2)$$

$$C_n \le C < C_n + 10^{-n} \quad (3)$$

យើងចង់បង្ហាញថា A + (B+C) = (A + B) + C [37]

ដោយប្រើ (2) និង (3) យើងបាន ៖ $(B_n + C_n) \le (B + C) < (B_n + C_n) + 2.10^{-n}$ (4)

ដោយប្រើ (1) និង (2) យើងបាន ៖ $(A_n + B_n) \le (A + B) < (A_n + B_n) + 2.10^{-n}$ (5)

ដោយប្រើ (1) និង (4) យើងបាន ៖

[37] ក្នុងវិធីគណនា a+(b+c) គេគណនា b បូកនឹង c ជាមុនសិន រួចហើយដល់បានលទ្ធផល ទើបគេយកមកបូកនឹង a ។ ហើយគេថា លេខបូក មានលក្ខណៈផ្តុំ កាលណា (a+b)+c = a+(b+c) ។

$A_n + (B_n + C_n) \leq A + (B + C) < A_n + (B_n + C_n)+3.10^{-n}$ រឺ ដោយ A_n, B_n, C_n ជាទសភាគ ជម្មតា ៖ $\boldsymbol{A_n + B_n + C_n \leq A + (B + C) < A_n + B_n + C_n +3.10^{-n}}$ **(7)**

ដោយប្រើ (5) និង (3) យើងបាន ៖

$(A_n + B_n) + C_n \leq (A + B)+ C < (A_n + B_n) + C_n+3.10^{-n}$ រឺ ដោយ A_n, B_n, C_n ជាទសភាគ ជម្មតា ៖ $\boldsymbol{A_n + B_n + C_n \leq (A + B) + C < A_n + B_n + C_n +3.10^{-n}}$ **(8)**

ដោយ (7)និង (8) យើងឃើញថា ចំនួនទសភាគ $A_n + B_n + C_n$ ជាតម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម 3.10^{-n} នៃផលបូក $(A + B) + C$ និង $A + (B + C)$ ហើយ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall n$ ។ ដូច្នេះ តាម ការស្មើ-VI-6-2 ផលបូកទាំងពីរនេះ ស្មើគ្នា ដែលគេបកស្រាយថា ទំនាក់ទំនង $(A + B) + C = A + (B + C)$ ដែលថា វិធីបូក មានលក្ខណ:ផ្តុំ ។

ការសន្និដ្ឋាន

ដោយការស្មើទាំងអស់ ដែលបានឃើញរួចមកហើយនេះ គេថា ចំពោះវិធីបូក ចំនួនពិតរួមគ្នាបានជា ក្រុមមួយ ហៅថា « **គ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់គ្មានសល់**[38]» (groupe abélien totalement ordonné) ។

សេចក្តីសង្កេតអំពីស្វីត

យើងតាងដោយ(A^{α}) ស្វីត កើន និង បន្ថែម (majorée) នៃចំនួនពិត ហើយដោយ A គោលទាល់លើ របស់ស្វីតនោះ ក្នុង Δ ។ យើងធ្លាប់បានឃើញរួចមកហើយ (មើល ការស្មើ-*VI*- 5-1) ថានៅពេលនោះមាន ស្វីត នៃចំនួនគត់ α_n ដែល $\forall \alpha \geq \alpha_n, A_n^{\alpha} = A_n$ ។ បើ A’ ជា គោលទាល់លើ ក្នុង R នៃ A^{α} នោះ គេបានទៅតាមករណី $A' = A$ ឬ $A' = \bar{A}$ ហើយគ្រប់ករណីទាំងអស់ $A' < A_n + 10^{-n}$ ។ ហើយបើ ចំពោះ $\alpha \geq \alpha_n$ នោះគេបាន

[38] បានន័យថា បើគេឲ្យចំនួនពិតពីរ A និង B គេអាចប្រៀបធៀបជានិច្ច ចំនួនទាំងពីរនោះ គឺថាគេអាចសរសេរថា ៖ $A \leq B$ ឬ $B \leq A$ នេះ $\forall A \in R, \forall B \in R$ ។

$A^\alpha \leq$ A' < $A^\alpha + 10^{-n}$ ។

នៅដែលយើងកំណត់សញ្ញាណជាទូទៅនៃ លីមីត នោះអាចនិយាយថា ចំនួនពិត A' =sup_R (A^α) គឺជាលីមីតរបស់ស៊ីតA^α ហើយយើងក៏អាចថ្លែងថា ៖

ការស្មើ-VI-7-5

គ្រប់ស៊ីត កើន ហើយ បន្ថែម នៃចំនួនពិត មានលីមីត ។

ក្នុងការស្មើនេះ A' ជា គោលទាល់លើ ក្នុង R នៃ A^α ហើយនៅពេលនោះយើងបាន $A^\alpha \leq$ A' < $A^\alpha + 10^{-n}$ ។

ឥឡូវនេះបើ A' ជា គោលទាល់ក្រោម ក្នុង R នៃ ស៊ីតចុះ ហើយបន្ថយ (minorée) A^α នៃចំនួនពិត នៅពេលនោះយើងក៏បាន៖ ចំពោះ α ធំបង្គួរ នូវវិសមភាព

$A^\alpha - 10^{-n} <$ A' $\leq A^\alpha$ ដែលគេបកស្រាយថា A' ជា លីមីតនៃស៊ីត A^α ។

សម្រាប់តទៅមុខ យើងត្រូវបង្ហាញថា ចំនួនពិត ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងការស្មើខាងក្រោមនេះ ។

ដោយសន្មតនូវ (I) យើងឃើញថា (x_n) ជាស៊ីត កើន ហើយបន្ថែមដោយ $x'_p, \ \forall p$ ។

ដូច្នេះ ស៊ីតនេះ មាន គោលទាល់លើនៅក្នុង R តាងដោយ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង

$x_n \leq x \leq x'_p$, $\forall n, \forall p$ ដូច្នេះក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $x_n \leq x \leq x'_n$, $\forall n$ ។

ការស្មើ-VI-7-6

គេឲ្យ (x_n) និង (x'_n) ពីរស៊ីតនៃចំនួនពិត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ នឹង៖

(I) $x_n \leq x_{n+1} \leq x'_{n+1} \leq x'_n$, $\forall n$

នៅពេលនោះ គេអាចរកបានយ៉ាងហោចណាស់ មួយ នូវចំនួន x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $x_n \leq x \leq x'_n$, $\forall n$ ។

សង្កេត

បើស៊ីត x_n និង x'_n ផ្ទៀងផ្ទាត់ ត្រឹមតែ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ **(I)** តែប៉ុណ្ណោះ នោះវាអាចមាន **x** លើសពីមួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $x_n \le x \le x'_n$, $\forall n$ ។ ដើម្បីជានាថា x មានតែមួយនោះ ត្រូវ ស៊ីត x_n និង x'_n ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង ល័ក្ខខ័ណ្ឌ បន្ថែមមួយទៀតគឺ ៖

(II) ***ទោះជា ចំនួន $\varepsilon > 0$ ប៉ុណ្ណាក៏ដោយ គេក៏អាចរកចំនួន p ដែលកាលណា គេយក ចំនួនគត់ $n \ge p$ នៅពេលនោះគេបាន*** $x'_n - x_n \le \varepsilon$ (គេបកស្រាយល័ក្ខខ័ណ្ឌនេះ ដោយនិយាយថា ផលសង $(x'_n - x_n)$ ខិតជិតសូន្យ) ។

ឧបមាថា លក្ខខ័ណ្ឌ (I) និង (II) ផ្ទៀងផ្ទាត់ទាំងពីរ ហើយ យើងតាងដោយ x **និង** y ចំនួនពិត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $x_n \le x \le x'_n$, $x_n \le y \le x'_n$, $\forall n$ ។ បើ p ជាចំនួនគត់គេឲ្យ នោះគេអាច យក n ដែលឲ្យ $x'_n - x_n \le 10^{-p}$(ដោយ (II)) ។ នៅពេលនោះយើងឃើញថា <u>ចំនួនទាំងពីរ</u> x **និង** y មាន x_n ជាតម្លៃ ប្រហែល យកត្រឹម 10^{-p} ហើយវាត្រូវយ៉ាងនេះ ទោះជា p ប៉ុនណាក៏ដោយ ។ ដូច្នេះ $x = y$ (ដោយ ការស្មើ-VI-6-2)។

ដោយការសង្កេតនេះ ចំនួនពិត អាចកំណត់ដោយ ស៊ីត x_n នៃតម្លៃប្រហែលខ្វះ (valeur approchée par défaut) <u>និង</u> ដោយ ស៊ីត x'_n នៃតម្លៃប្រហែលលើស (valeur approchée par excès) ហើយ ផលសង $(x'_n - x_n)$ រវាងស៊ីតទាំងពីរត្រូវខិតជិតសូន្យ ។

8. វិធីគុណ នៃចំនួនពិត (*Multiplication des nombres réels*).

និយមន័យ

បើ* A *និង* B *ជាចំនួនពិត វិជ្ជមាន នោះតម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល លំដាប់* n *ទូទៅ **(valeurs décimales approchées d'ordre quelconque n)** ***ក៏វិជ្ជមាន ហើយ ផលគុណ*** $A_n B_n$ ***នៃតម្លៃ ដេស៊ីមាលប្រហែល បានទៅជាស៊ីតមួយ កើន នៃចំនួនទសភាគ បន្ថែម ដោយ***

***ចំនួនគត់* $(a_0+1)(b_0+1)$[39] ។**

តាមនិយមន័យ គោលទាល់លើ (ឬលីមីត) ក្នុង R នៃស្វ៊ីត A_nB_n នឹងហៅថា ផលគុណ នៃចំនួន A, B ហើយតាងដោយ A B គឺថា ៖ $A\,B = sup_R(A_n\,B_n)$ បើ $A \geq 0$ និង $B \geq 0$ ។

បើ A និង B ជាចំនួនទសភាគ តាមនិយមន័យខាលើ យើងក៏ឃើញឡើងវិញនូវ ផលគុណ នៃចំនួនទសភាគ ។

ផលគុណនៃចំនួនពិត ជាទូទៅ នឹងកំណត់ដោយ ក្បួនសញ្ញា ៖ ហើយជាទូទៅ យើងនឹងហៅថា តម្លៃដាច់ខាត (valeur absolue) នៃចំនួនពិត ជាទូទៅ A គឺចំនួនពិត វិជ្ជមាន $|A|$ ស្មើនឹងចំនួនណាមួយដែលធំជាងគេក្នុងចំណោម ចំនួន A និង -A ។ ផលគុណ A B នៃពីរចំនួនពិត ជាទូទៅ មិនសូន្យ នឹងកំណត់ដោយ $A\,B = |A||B|$ ឬ $A\,B = -|A||B|$ ទៅតាម A និង B មានសញ្ញា ដូច ឬ មិនដូចគ្នា។ ហើយយើងនឹងដាក់ថា A B = 0 បើ A ឬ B សូន្យ ។

ដូច្នេះវាច្បាស់ហើយ ថា ផលគុណ នៃចំនួនពិតពីរ អាចស្មើនឹងសូន្យ បើសិនជា កត្តាណាមួយស្មើនឹងសូន្យ ។

<u>*ការស្មើ*-VI-8-1</u>

***វិធីគុណ នៃចំនួនពិត មានលក្ខណៈ ត្រលប់* (commutative) ។**

យើងគ្រាន់បញ្ជាក់ ការស្មើនេះ ដោយយកចំនួនពិត A និង B ទាំងពីរ វិជ្ជមានហើយនៅពេលនោះ ផលគុណ A B និង B A គឺជាគោលទាល់លើ ក្នុង R នៃ<u>ស្វ៊ីតពីរស្មើគ្នា</u> A_nB_n និង B_nA_n ដូច្នេះ ៖ A B = B A ។

[39] A = a_0,a_1a_2.... => A < a_0+1

ដើម្បី បញ្ជាក់នូវការស្នើ-VI-ឯទៀតៗ ក្នុង វិធីគុណនៃចំនួនពិត យើងនឹងពឹងផ្អែក ទៅលើវិធីគុណនៃចំនួនទសភាគ ។ តែជាដំបូង យើងត្រូវបញ្ជាក់ នូវរបៀបខិតទៅជិត រវាង ផលគុណនៃពីរចំនួនពិត និង ផលគុណនៃពីរតម្លៃប្រហែលរបស់វា ។

ការស្នើ-VI-8-2

បើចំនួនពិត A, B, C បំពេញ C ≥ 0 និង A ≥ B នោះគេបាន A C ≥ B C ។

យើងឃើញថាគ្រាន់តែបញ្ជាក់ ការស្នើនេះក្នុងករណី A និង B ជាចំនួនវិជ្ជមាន[40] នៅពេលនោះ គេបាន $A_n \geq B_n$ ដូច្នេះក៏បាន $A_nC_n \geq B_nC_n$ ហើយ វិសមភាព A C ≥ $B\,C$ ជាផលវិបាក នៃការស្នើ-VI-5-2 ។

ការអនុវត្តន៍

បើ A_n និង B_n ជា តម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល យកត្រឹមលំដាប់ n នៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន A, B នោះ គេបាន ៖ $0 \leq A_n \leq \mathrm{A} < A_n + 10^{-n}$ និង $0 \leq B_n \leq \mathrm{B} < B_n + 10^{-n}$

ហើយដោយប្រើ ការស្នើ-VI-8-2 ពីរដង យើងទាញយកបាននូវ៖

$$A_nB_n \leq A\,B < (A_n + 10^{-n})(B_n + 10^{-n})$$

ការស្នើ-VI-8-3

វិធីគុណ នៃចំនួនពិត មានលក្ខណៈ ផ្តុំ (associative) ។

---

[40] យើងបានឃើញរួចមកហើយ ចំនួនវិជ្ជមាន និងចំនួនធម្មតា ខុសគ្នាតែត្រង់សញ្ញា ប៉ុណ្ណោះទេ ចំពោះតម្លៃដាច់ខាត វាស្មើគ្នា ។

ដោយក្បួន សញ្ញា យើងគ្រាន់តែ បញ្ជាក់ នូវទំនាក់ទំនង៖

(A B) C = A (B C) *ក្នុងករណីដែល* A, B, C *ជាចំនួនពិត វិជ្ជមាន ។*

យើងឃើញថា ចំនួន P_1 = (A B) C *និង* P_2 = A (B C) *ទាំងពីរនេះផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងវិសមភាព មានរៀងជា ៖*

(1) $A_n\, B_n\, C_n \le P < (A_n + 10^{-n})(B_n + 10^{-n})(C_n + 10^{-n})$ [41]

យើងចង់ដាក់ $M = (A_n + 10^{-n})(B_n + 10^{-n})(C_n + 10^{-n})$ *ឲ្យមានរៀងជា* $k.10^{-n}$

ដោយបំបែក ៖

$M = A_n\, B_n\, C_n + 10^{-n}(A_nB_n + A_nC_n + B_nC_n) + 10^{-2n}(A_n + B_n + C_n + 1)$

$M < A_n\, B_n\, C_n + 10^{-n}(A_nB_n + A_nC_n + B_nC_n) + (A_n + B_n + C_n + 1)$ (*ពីព្រោះ* $10^{-2n} < 1$)

យើងតាងដោយ k *ចំនួន ដែល ធំឬស្មើនឹង៖*

$k \ge$ A B + A C + B C + A + B + C + 1 => $M < A_n\, B_n\, C_n + k.10^{-n}$

ដូច្នេះ **(1)** *ទៅជា៖* $A_n\, B_n\, C_n \le P < A_n\, B_n\, C_n + k.10^{-n}$ *៖ វិសមភាពនេះបង្ហាញថា* $A_n\, B_n\, C_n$ *ជា តម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម* $k.10^{-n}$ *នៃចំនួន* P_1 *និង* P_2 *។*

ដោយ វិសមភាពនេះ ត្រូវ $\forall n$ *នោះ យើងបាន* $P_1 = P_2$ [42]*។*

---

[41] *តើយើងសង្កេត ឃើញយ៉ាងណាដែរ ចំពោះរបៀបបញ្ជាក់ នៃ ការស្មើ-VI- ទាំងឡាយ ដែលទាក់ទងនឹង* ***ចំនួនពិត ?*** *របៀបដែលគេប្រើ គឺបើចំនួពិត* A *នោះគេគិតពី* <u>*តម្លៃប្រហែលរបស់វា* A_n</u> *ហើយដោយស៊ីត* A_n *មានគោលទាល់លើ នោះគេថា ទំនាក់ទំនងដែលគេចង់បង្ហាញនោះ ក៏នៅតែត្រូវ ទៅដល់លីមីត ដែលជា* ***ចំនួនពិត*** *។ ហេតុអ្វីបានជាគេប្រើ* A_n *? ព្រោះ* A_n *ជាចំនួនទសភាគធម្មតា ដែលគេស្គាល់ វិធីបូក ឬ វិធីចែក រួចទៅហើយ ហើយគេក៏ស្គាល់លក្ខណៈរបស់វា ដូចជា ៖ ត្រលប់ ឬ ផ្តុំ ជាដើម ។ នេះជារបៀបមួយដែលគេច្រើនប្រើ បើកាលណាគេចង់ពង្រីក* (généraliser) *ទ្រឹស្តីអ្វីមួយក្នុងការស្រាវជ្រាវ* (la recherche)*។ នៅទីនេះ គឺការពង្រីកចំនួន ទសភាគ មក ចំនួនពិត ។*

[42] *កាលណាវិធីគណនា ណាមួយ មានលក្ខណៈ ផ្តុំ នោះគេអាចលប់វង់ ក្រចក គឺថា គេអាចសរសេរ ៖*
(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C

ការស្មើ-VI-8-4

វិធីគុណនៃចំនួនពិត មានលក្ខណៈបំបែក ចំពោះវិធីបូក ។

ដើម្បីបង្ហាញ ការស្មើ-VI-នេះ គេគ្រាន់តែ បញ្ជាក់ណូវ រូបមន្ត (A + B) C = A C + B C និង (A - B) C = A C – B C ដោយសន្មត់ A, B, C ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។ យើង បង្ហាញតែ រូបមន្តទីពីរ ដែលមិនជាស្រួលក្នុងចំណោមរូបមន្តទាំងពីរ ។ ហើយយើង សន្មត់ថា A > B ដើម្បីគោរពក្បួននៃសញ្ញា ។ កាលណា n ធំ យើងអាចបាន $A_n \geq B_n + 10^{-n}$ ហើយនិង វិសមភាព ៖ $A_n \leq A < A_n + 10^{-n}$; $B_n \leq B < B_n + 10^{-n}$; $C_n \leq C < C_n + 10^{-n}$

វិសមភាពទាំងនេះ ផ្តល់ឲ្យ ៖

$A_n - B_n - 10^{-n} \leq A - B < A_n - B_n + 10^{-n}$ ហើយ ដោយ គុណនឹង C_n

(I) $C_n (A_n - B_n - 10^{-n}) \leq C (A - B) < (C_n + 10^{-n}) (A_n - B_n + 10^{-n})$ [43] ។

ហើយម្យ៉ាងទៀត៖

$C_n A_n \leq C A < (C_n + 10^{-n}) (A_n + 10^{-n})$

$C_n B_n \leq C B < (C_n + 10^{-n}) (B_n + 10^{-n})$

ដូច្នេះ ៖

(II) $C_n A_n - (C_n + 10^{-n}) (B_n + 10^{-n}) < C A - C B < (C_n + 10^{-n}) (A_n + 10^{-n}) - C_n B_n$ [44]

យើងចង់បង្ហាញថា ចំនួនទសភាគ $C_n A_n - C_n B_n = C_n (A_n - B_n)$ ជាតម្លៃប្រហែល

---

[43] នេះជាខាង (A – B) C

[44] បើ [A < B និង C < D] => [A – D < B – C] គឺថា ៖ A តូច គេយក D ធំមកដក ហើយ B ធំ គេយក C តូចមកដក ដូច្នេះ វិសមភាព នៅដដែល ។

នៃចំនួនពិត C A – C B និង C (A – B) ដោយ យកត្រឹម $\underline{10^{-n}(A + B + 2C + 1)}$ បាន ដោយប្រើ (I)និង (II) ។ ដោយហេតុការណ៍នេះត្រូវ កាលណា n ធំគ្រប់គ្រាន់ នោះគេក៏បាន C A – C B = C (A – B) ។ ខ្ញុំទុកជូនលោកអ្នករក ការបង្ហាញនេះ ដោយខ្ញុំបានធ្វើ នៅក្នុងការស្នើ-VI-8-3 រួចម្តងមកហើយ ។

ដើម្បីបញ្ចប់ កម្មសិទ្ធិ នៃវិធីគុណ យើងនៅតែបញ្ជាក់ថា ចំនួនពិតនីមួយៗ ក្រៅពីសូន្យ មាន ចំរាស ។ តែដំបូង យើងត្រូវបញ្ជាក់ថា ចំនួនទសភាគ នីមួយៗ ក្រៅពីសូន្យ មាន ចំរាស ដែលជា អនុសាធ្យ នៃការស្នើ-VI- ដូចតទៅនេះ ។

<u>ការស្នើ-VI-8-5</u>

បើ A និង B ជាចំនួនទសភាគ ហើយបើ B មិនសូន្យ នោះមានចំនួនពិត C មិនសូន្យ ដែលឲ្យ A = B C ; ហើយការបំបែកដេស៊ីមាលនៃ C បានមកពី វិធីចែក មិនចប់ នៃ ចំនួន A ដោយចំនួន B ។

<u>បង្ហាញ ៖</u>

ដោយគុណ A និង B ដោយ ស្វ័យគុណដ៏សមរម្យ នៃ 10 យើងអាចសន្មត ថា A និង B ជាចំនួនគត ។ ម្យ៉ាងទៀតដោយក្បួននៃសញ្ញា យើងអាចកំរិតយក A និង B ជាចំនួន វិជ្ជមាន ។

បើយើងតាងដោយ x_n លទ្ធផល ប្រហែល យកត្រឹម 10^{-n} នៃវិធីចែក A នឹង B នោះ យើងបាន វិសមភាព (មើល §4)៖

(1) $$B\,x_n \le A < B(x_n + 10^{-n})$$

ការសិក្សានៅ §4 អាចឲ្យយើងរកថា x_n តម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល យកត្រឹមលំដាប់ n

នៃ D.D.I. $x_0, c_1c_2 \dots\dots..c_n \dots\dots\dots$ ដែលមិនជាប់ជំពាក់នឹង n [45]។ ហើយបើយើង តាង ដោយ C ចំនួនពិត តាងដោយ D.D.I. នេះ យើងបាន វិសមភាព ៖

$$x_n \quad \leq C \leq \; x_n + 10^{-n} \quad =>$$

(2) $\quad B\, x_n \;\leq B\, C \leq\; B\,(x_n + 10^{-n})$

ដោយប្រៀបធៀប (1) និង (2) យើងឃើញថា A និង B C ទាំងពីរ មាន $B\,x_n$ តម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម 10^{-n} $\forall n$ ។ ដូច្នេះ តាមការស្នើ-VI-6-2 យើងបាន A = B C ។

ដោយ (1) យើងមាន A < B($x_n + 10^{-n}$) => B C < B($x_n + 10^{-n}$) => C < ($x_n + 10^{-n}$) ដែលបង្ហាញថា $x_0, c_1c_2 \dots\dots..c_n \dots\dots\dots$ ជាតំណាងដេស៊ីមាលធម្មតា[46] នៃចំនួន C (*représentation décimale régulière du nombre C*) ។

ម្យ៉ាងទៀត C ជាចំនួនពិត តែមួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង A = B C ។ ព្រោះថាបើមាន $A = B\,C'$ ឲ្យ $B(C - C') = 0$ ដូច្នេះ $C = C'$ ។ ដូច្នេះ គេអាចតាង ដោយមិនខ្លាចច្រឡំ $\frac{A}{B}$ ជាចំនួន C ដែលជា ផលចែកដាច់ ក្នុងវិធី ចែក A ដោយ B ។

ដូច្នេះ ចាប់ពីពេលនេះទៅ ចំរាស នៃចំនួនពិត គឺកំណត់ដោយ ស៊ីតកើន នៃតម្លៃប្រហែលខ្វះ ឬ ដោយស៊ីត ចុះ នៃតម្លៃប្រហែលលើស ។

ការស្នើ-VI-8-6

គ្រប់ចំនួនពិត មិនសូន្យ មាន ចំរាស ។

---

[45] ត្រូវដឹងថា ក្នុងការសេសេរ D.D.I. នេះ ៖

$x_0 = x_0$; $x_1 = x_0, c_1$; $x_2 = x_0, c_1c_2$; …. ; $x_n = x_0, c_1c_2 \dots\dots.c_n$; ……. ។

[46] គឺមិនមែននៅក្នុង Δ_9

គេឲ្យបំនួនពិត $A \neq 0$ គេចង់រក ចំនួន B (តែមួយ) ដែលឲ្យ $AB = 1$ ។ យើងសន្មតថា $A > 0$ [47] (ពីព្រោះ ក្បួនសញ្ញានោះ យើងចេះហើយ ចូរសម្រួលទៅតាមនោះចុះ) ។

យើងតាងដោយ A_n តម្លៃដេស៊ីមាល ប្រហែល យកត្រឹមលំដាប់ n នៃ A ។ ដោយ $A > 0$ ដូច្នេះ មានចំនួនគត់ p_0 ដែល $p \geq p_0$ នោះយើងបាន $A_p > 0$ ។ យើងតាង $A_{p_0} = \alpha$ ។ ម្យ៉ាងទៀត គេដឹងថា ស៊ីត $A_n + 10^{-n}$ ជាស៊ីតចុះ បន្ថយដោយ A_p , $\forall p$ (minorée par A_p, $\forall p$) ។ ចំពោះតម្លៃ n នីមួយៗ ដោយ**ការស្នើ-VI-8-5** គេបានចំនួនពិត B_n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $B_n(A_n + 10^{-n}) = 1$។

ស៊ីត B_n ជាស៊ីត កើន ហើយ បន្ថែមដោយ $\frac{1}{\alpha}$ (ពីព្រោះ $B_n(A_n + 10^{-n}) = 1$ => $B_n = \frac{1}{A_n + 10^{-n}} \leq \frac{1}{\alpha}$)។ យើងតាងដោយ B គោលទាល់លើ នៅក្នុង R នៃស៊ីតនេះ។

គេក៏បាន $B \geq B_n$ ហើយម្យ៉ាងទៀត ទំនាក់ទំនង $B_n \leq \frac{1}{A_p}$ ដែលត្រូវចំពោះ $p \geq p_0$ បណ្ដាលឲ្យ $B \leq \frac{1}{A_p}$ ។ ចំពោះ $n \geq p_0$ គេបានវិសមភាព ៖

$$\frac{1}{A_n + 10^{-n}} \leq B \leq \frac{1}{A_n} \quad \text{(ព្រោះ } B_n \text{ ជាស៊ីត កើន)}$$

ដោយ $A_n \leq A \leq A_n + 10^{-n}$ នោះគេបាន៖

$$\frac{A_n}{A_n + 10^{-n}} \leq AB \leq \frac{A_n + 10^{-n}}{A_n} \quad =>$$

$$\left|\frac{A_n}{A_n + 10^{-n}} - 1\right| \leq |AB - 1| \leq \left|\frac{A_n + 10^{-n}}{A_n} - 1\right|$$

ឬ $$\frac{10^{-n}}{A_n + 10^{-n}} \leq |AB - 1| \leq \frac{10^{-n}}{A_n}$$

[47] ដូចជា A = 0,0000245814…… ជាដើម

ដោយ $\frac{1}{A_n} \le \frac{1}{\alpha}$ ដូច្នេះ $|\mathbf{AB-1}| \le \frac{1}{\alpha}\mathbf{10^{-n}}$ ដែលបង្ហាញថា ចំពោះ $n \ge p_0$, ចំនួនពិត AB និង 1 មានតម្លៃប្រហែលខ្ទះ យកត្រឹម $\frac{1}{\alpha}10^{-n}$ ។ ដូច្នេះ គេបាន AB = 1 នេះមានន័យថា ៖ ក្នុង R កាលណា A មិនសូន្យ នោះ A ក៏មាន B ជាចំរាសរបស់វា។

សង្កេត

មកដល់ត្រឹមនេះ បើលោកអ្នកយល់ហើយក៏ សាធុទៅ តែបើមិនទាន់យល់ ថា ∝ នោះបានមកដោយរបៀបយ៉ាងណា នោះមានពន្យល់ដូចតទៅនេះ ដោយឧទាហរណ៍ ៖

ឧបមា A = 0,0008273……

យើងឃើញថា $A_0 = 0$; $A_1 = 0,0$; $A_2 = 0,00$; $A_3 = 0,000$; $A_4 = 0,0008 > 0$

n	p	A_p	A_n	$A_n + 10^{-n}$
n= p_0	$p_0 = 4$	$A_{p_0} = 0,0008 = \propto$	0,0008	$0,0008 + 10^{-4} = 0,0009$
4	p = 4	$A_p = 0,0008 > 0$	$A_n = A_p = 0,0008 = \propto$	0,0009
5			0,00082	0,00083
6			0,000827	0,000828
7			0,0008273	0,0008274
…			…….	…..

នៅក្នុងតារាងនេះ ចាប់ពី $n \ge 5$ ទៅ ស៊ីត $A_n + 10^{-n}$ ចុះ រហូត តែវា ឃាំងដោយ $A_p = \propto$ ពីព្រោះ ៖

$0,0008 = \propto < 0,00083 < 0,000828 < 0,0008274 < \ldots\ldots..$ ។

ដោយ $\propto \le A_n$ ចំពោះ $n \ge p_0$ ដូច្នេះ $\frac{1}{A_n} \le \frac{1}{\propto}$ ។

ដើម្បីរកចំរាស នៃ A គេក៏អាចប្រើស៊ីត ចុះ $B'_n = \frac{1}{A_n}$ ហើយ គោលទាល់ក្រោម B'

នៃស៊ីតនេះ (ដូច B ដែរ) ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $\frac{1}{A_n + 10^{-n}} \leq B' \leq \frac{1}{A_n}$ ចំពោះ $n \geq p_0$ ដូច្នេះ យើងក៏បាន A B' = 1 ហើយ B = B' ។

ដោយការសិក្សានេះ គេឃើញថា សំនុំនៃចំនួនពិត ជា អង្គត្រលប់ (corps commutatif) រៀបតាមលំដាប់ទាំងអស់ (totalement ordonné) ។

ពីចំនួន សនិទាន $\frac{a}{b}$ គេអាចផ្គុំ នឹងចំនួនពិត ដែលជា ផលចែក a ដោយ b ៖ ដូច្នេះ គេមានអាំងសេចស្យុង (injection) ពី Q ទៅ R ។ គេក៏អាចថា អង្គ Q (corps Q) នៃ ចំនួនសនិទាន ជាអង្គតូច (sous-corps) នៃ R ។

ដោយប្រើរបៀបដូចគ្នានឹង របៀបដែលប្រើក្នុង ការស្មើ (VI – 8 – 5) បានការស្មើដូចតទៅ ៖

<u>*ការស្មើ*-VI-8-7</u>

ចំនួនពិត វិជ្ជមានទីមួយៗ មានរឺសការេវិជ្ជមាន ដែលជា* D.D.I *បានមក ដោយបន្តដល់អនន្ត នូវប្រមាណវិធីរករឺសការេ ។

ជាទូទៅ គេអាចតាំងឡើងថា ចំនួនពិតវិជ្ជមាន មានរឺសវិជ្ជមានលំដាប់ p ដោយ p ជាចំនួនគត់ ណាមួយក៏ដោយ ។

9. កម្មសិទ្ធិ ជាលក្ខណៈនៃចំនួនពិត (Propriétés caractéristiques des nombres réels).

ទ្រឹស្តី ដែលយើងទើបតែនឹងធ្វើចំពោះ ប្រព័ន្ធនៃ បាត10 (système de base 10) អាចប្រើបាននៅក្នុង ប្រព័ន្ធនៃបាត k (système de base k) : ចំពោះ ចំនួនគត់ k ណាមួយ យើងរាប់រកនូវសំនុំ R_k នៃស៊ីត នៃចំនួនគត់ a_0 , a_1, a_2, ……., a_n ដែល

បំពេញ $0 \leq a_i < k$ ចំពោះ $i \geq 1$ (a_0 ជាចំនួនគត់ទូទៅណាមួយ) ហើយយើង

អាចហៅ ថា « ចំនួនពិត » គឺ ស្ទីតណាមួយ ដែលមានតួច្រើនដល់អនន្ត ខុសពី k – 1[48]។

សង្កេត

a_0 គឺផ្នែក គត់ ហើយ $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ គឺលេខនីមួយៗនៃផ្នែក ដេស៊ីមាល ដូច្នេះចំនួនដេស៊ីមាលគឺ $a_0, a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$ ។ បើ នៅក្នុង បាត 10 ហើយបើចំនួន

$x = 257{,}999999\ldots\ldots9$ នោះគេសន្មតយក $x = 258$។

ដោយពង្រីក និយមន័យទាំងឡាយនៃ បាត 10 យើងបាននៅលើ R_k នូវប្រព័ន្ធនៃ អង្គត្រលប់ (on obtient sur R_k une structure de corps commutatif) រៀបតាមលំដាប់ទាំងមូល (*totalement ordonné*) ហើយដែលនៅក្នុងនោះ មាន អង្គរង មួយ អ៊ីសូម៉ោស[49](isomorphe) នឹង Q ។ គ្រប់ R_k ទាំងអស់ បំពេញនូវ កម្មសិទ្ធិជាគ្រឹះ (VI,7,5) និង (VI,7,6)។ គេនឹងឃើញដោយមិនពិបាកថា គ្រប់ R_k ទាំងនោះ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ (l'axiome d'Archimède) ដែលយើងនឹងឃើញនៅខាងមុខនេះ។

សំនួរមួយដែលចោទ គឺថា តើចំនួនពិត ដែលបាននៅក្នុង បាត k ដូចគ្នានឹងចំនួនពិតនៅក្នុង បាត 10 ឬទេ? ។

តាមពិត គឺមិនមែនចង់បង្ហាញថា សំនុំដែលបានមកទាំងអស់នោះ គឺ ដូចគ្នានោះទេ តែគ្រាន់តែចង់បង្ហាញថា សំនុំទាំងនោះ អ៊ីសូម៉ោស (isomorphe) នឹងគ្នាតែប៉ុណ្ណោះ ។ យើងនឹងឆ្លើយទៅសំនួរនេះ ដោយបង្ហាញថា គ្រប់អង្គ ត្រលប់ មានលំដាប់ទាំងមូល ដែល បានបំពេញ ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ (Axiome d'Archimède) និង ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ (Axiome Cantor) នោះ អ៊ីសូម៉ោស នឹង អង្គនីមួយៗ នៃ អង្គ R_k (ការស្នើ-VI-10-2) ។

---

[48] ចំពោះ k = 10 នោះ k – 1 = 9 ហើយនៅទីនេះគឺ តួ ដែលខុសពី 9 អាចមានដល់អនន្ត ។

[49] ជាកិរិយាសព្ទ តែមានន័យដូចគ្នានឹង អ៊ីសូម៉ោហ្វិស (ក៏ដូចពាក្យ ថា ដើរ ហើយនិង ដំណើរ)។

ដូច្នេះ អង្គ R_k ទាំងអស់ សុទ្ធតែ អ៊ីសូម៉ោស នឹងគ្នាទៅវិញទៅមក ហើយយើងអាចហៅដោយមិនខ្វាចភាពផ្ទុយគ្នា ថា « ចំនួនពិត » គឺជាតុនៃអង្គ R_k ណាមួយកក៏បាន។ តែសញ្ញាណនៃចំនួនពិត ក្នុងករណីខ្លះក៏ជាសញ្ញាណដែលដឹងដោយញាញ ផ្តល់ដោយការវាស់វែងនៃទំហំ ជាពិសេសដោយការវាស់នូវប្រវែង (la mesure des longueurs)។ ហេតុនេះហើយ នៅក្នុងសៀវភៅថ្នាក់ទាបខ្លះ គេមិនឲ្យអត្ថន័យនៃសញ្ញាណនេះទេ ៖ ចំនួនដែលឥឡូវនេះហៅថាចំនួនពិត គឺជា អាប់ស៊ីស (abscisses) នៃចំណុចនៅលើបន្ទាត់ មានទិសដៅ (des abscisses de points sur une droite orientée) ហើយកម្មសិទ្ធិនៃនៃចំនួននោះ បេញមកពីកម្មសិទ្ធិដែលគេឲ្យជាធម្មតាទៅសំនុំ ដែលហៅថា «បន្ទាត់ » នៅធរណីមាត្រ (attribuer à l’ensemble appelé « droite » en géométrie) ។ ដូច្នេះយើងត្រូវស្គាល់ឲ្យច្បាស់នូវ « បន្ទាត់ធរណីមាត្រ »នោះ ដើម្បីយើងនឹងអាចបង្ហាញថាវា អ៊ីសូម៉ោស នឹង « បន្ទាត់នៃចំនួន » (*la droite numérique*) សាងសង់ឡើងដោយវិធីពីជគណិត ផ្តើមចេញពីសញ្ញាណនៃចំនួនគត់។ ហើយក៏ត្រូវតែភ្ជាប់កម្មសិទ្ធិនៃ បន្ទាត់ធរណីមាត្រ ទៅនឹងកម្មសិទ្ធិនៃទំហំដែលអាចវាស់បាន (grandeur mesurable)។

ដូច្នេះយើងចាប់ផ្តើមដោយបញ្ជាក់នូស្វ័យសត្យនៃ ទំហំដែលអាចវាស់បាន ដែលយើបានបញ្ចូលនៅ §1។ បន្ទាប់មកយើងនឹងឃើញថាតើ ស្វ័យស័ត្យទាំងនោះសម្រួលមកលើបន្ទាត់ធរណីមាត្រដោយរបៀបណា ។ នៅ §10 យើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់សំនុំដែលបំពេញនូវស្វ័យស័ត្យទាំងនោះ សុទ្ធតែអ៊ីសូម៉ោស ទៅនឹង បន្ទាត់នៃចំនួន ដែលបានសាងសង់កាលពីមុន។

ស្វ័យស័ត្យ នៃទំហំ ដែលអាចវាស់បាន (AXIOMES DES GRANDEURS MESURABLES.

យើងបានឃើញនៅ §1 ទំហំដែលនៅក្នុងក្រុមដូចគ្នាតាក់តែងផ្សំបានជា កន្ទះគ្រុប អាបេលីអៀង D (demi-groupe abélien D) និងបំពេញក្បួនសម្រួល (règle de simplification)។ របៀបដែលបានបង្ហាញ នៅ §V-3 និង §V-5[50] អាចធ្វើវាឲ្យទៅជាគ្រុប អាបេលីអៀង G បាន ដោយវិធីឆ្លុះ (par symétrisation)។ គឺក្រុមនេះហើយដែលយើង យកជាបានការ ត ទៅនេះ។ យើងនឹងឃើញ ក្នុងករណីជាច្រើន វិធីឆ្លុះ បកស្រាយ មកជាទិសដៅនៃទំហំដែលយើងសិក្សា។

ម្យ៉ាងទៀត គេអាចបង្ហាញដោយមិនពិបាក ថាគេអាចពង្រីក រ៉ឺឡាស្យុងលំដាប់គ្រប់ធាតុដែលនៅក្នុង D ឲ្យបានជា រ៉ឺឡាស្យុងលំដាប់គ្រប់ធាតុ នៅក្នុង G ដោយដាក់ ថា $a \geq b$ បើ $a-b \in D$ (មើលលំហាត់ voir exercice VI-12) ។ ធាតុនៃ D ក៏ជាធាតុវិជ្ជមាននៃ G ដែរ ។ ហើយគេក៏ឃើញថា រ៉ឺឡាស្យុង $a \geq b \Rightarrow a+c \geq b+c$ ដើម្បីឲ្យបានប្រព័ន្ធដូច្នេះ គេដាក់ជានិយមន័យ ដូចតទៅ៖

និយមន័យ

គេហៅថា គ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ គឺ គ្រុបអាបេលីអៀង ដែលនៅក្នុងនោះគេបានកំណត់ រ៉ឺឡាស្យុងលំដាប់គ្រប់ធាតុ ដែលបំពេញ $a \geq b \Rightarrow a+c \geq b+c$

(ដោយវិធីគណនានៃគ្រុប សរសេរជា បូក) ។

ដោយប្រមូល កម្មសិទ្ធិទាំងឡាយនៃទំហំដែលអាចវាស់បាន នៅ §1 យើងអាចថ្លែងថា៖

***ស្វ័យស័ត្យ នៃទំហំដែលអាចវាស់បាន** (axiomes des grandeurs mesurables).*

ទំហំ មានទិសដៅ នៅក្នុងក្រុមតែមួយ (les grandeurs orientées d'un même espèce) ផ្សំបានជា គ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ G បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌដូចតទៅ ៖

A) (*ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ* (axiome d'Archimède). ចំពោះធាតុណាក៏ដោយនៃ G

[50] §V-3 គឺ §3 នៃជំពូក V

ដែលបំពេញ $a > 0$ នោះមាន ចំនួនគត់ n មួយ ដែលបំពេញ $n\,a \geq b$ ។

B) (ស្វ័យស័ត្យ វិធីចែក (axiome de division). មានចំនួគត់ k > 1 ដែលចំពោះ ធាតុ a នីមួយៗនៃ G គេអាចផ្គូ នឹងធាតុ b យ៉ាងហោចក៏មួយដែរ ដែលបំពេញ $k\,b = a$ ។

C) (ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ (axiome de Cantor). ស្វីតពីរ x_n និង x'_n មានធាតុនៅក្នុង G ហើយ បំពេញ ៖

1° $x_n \leq x_{n+1} \leq x'_{n+1} \leq x'_n$ ចំពោះគ្រប់ ចំនួន n $(\forall n)$[51]

2° $\forall\varepsilon > 0$ នៃ G គេអាចរកបាននូវចំនួនគត់ N ដែល វិសមភាព $n > N \Rightarrow x'_n - x_n < \varepsilon$[52]

នៅពេលនោះ គេមានយ៉ាងហោចណាស់ មួយធាតុ x ដែលបំពេញ $x_n \leq x \leq x'_n$ $\forall n$។

ស្វ័យស័ត្យ នៃបន្ទាត់ ធរណីមាត្រ (AXIOMES DE LA DROITE GÉOMÉTRIQUE).

យើងនឹងត្រឡប់មកធរណីមាត្រវិញ ចំពោះសញ្ញាណ នៃបន្ទាត់មានទិសដៅ (droite orientée) នៃអង្កត់ (segment) និង នៃវ៉ិចទ័រ (vecteur)។

នៅពេលនោះយើងនឹងឃើញ និយមន័យ នៃវិធីបូក វ៉ិចទ័រពីរ នៅលើបន្ទាត់តែមួយ ហើយ និងការតាក់តែងនូវកម្មសិទ្ធិនៃវីធីនេះ។ នៅទីនេះ យើងសន្មត់ថា វ៉ិចទ័រសេរី ទាំងឡាយ (*les vecteurs libres*) នៅលើបន្ទាត់តែមួយមានទិសដៅ ប្រមូលផ្តុំបានជា

---

[51] វ៉ី ឡាស្យុង 1°បង្ហាញថា (x_n) ជាស្វីតកើន ហើយ (x'_n) ជាស្វីត ចុះ ។តែស្វីត (x_n) មាន ស្វីត (x'_n) ជា គោលទាល់លើ ហើយស្វីត (x'_n) មាន ស្វីត (x_n) ជាគោលទាល់ក្រោម។

[52] ឃ្លានេះគេសរសេរកាត់ដោយ ៖ $\forall\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in G)$ $\exists N$ ដែល $\forall n > N$ គេបាន $x'_n - x_n < \varepsilon$ ។

គ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ (*un groupe abélien ordonné*) ហើយយើងនឹងសង្កេត ឃើញថា ការឲ្យនូវចំណុចមួយនៅលើ បន្ទាត់ ក៏ដូចជាការឲ្យនូវ វ៉ិចទ័រមួយ ដែលមាន គល់ជាប់ (*un vecteur d'origine fixé*)។ របនាសម្ព័ន្ធ ជាក្រុម នៃសំនុំនៃវ៉ិចទ័រនៅលើ បន្ទាត់តែមួយមានទិសដៅ អាចដឹកមកដាក់លើបន្ទាត់ នៅពេលដែលគេបានរើសយក គល់នៃបន្ទាត់នោះ ។ ហើយនៅពេលនោះ ស្វ័យស័ត្យទាំងឡាយនៃ បន្ទាត់ធរណីមាត្រ បានមកដោយ អនុវត្តមកលើវ៉ិចទ័រនៅលើបន្ទាត់ នូវស្វ័យស័ត្យជាទូទៅទាំងឡាយនៃ ទំហំដែលអាចវាស់បាន។

I.ស្វ័យស័ត្យ **អារស៊ីមែដ** (d'Archimède) គេបានសន្មតតាំងពីដើមដំបូងនៃធរណីមាត្រ គឺ ថាគេច្រើន ថ្លែងថា « បន្ទាត់គឺ គ្មានទីបញ្ចប់ » (*la droite est illimitée*) ដែលមានន័យ មិនច្បាស់។

II. គេក៏បានសន្មត តាំងពីដើមដំបូងមកថា មួយ អង្កត់ អាចចែកជា k ចំណែកស្មើគ្នាបាន (*un segment quelconque peut être partagé en k parties égales, quel que soit l'entier k*) ដោយ k ជាចំនួនគត់ណាក៏ដោយ ៖ នេះក៏ដូចជាយើង សន្មតយកនូវស្វ័យស័ត្យនៃ វិធី ចែក (axiome de division) ចំពោះគ្រប់ចំនួន k ។ ហើយទាល់ទេដល់ថ្នាក់ទី៩ ទើបសិស្ស ចេះចែក ដោយធ្វើតាមធរណីមាត្រ អង្កត់ មួយជា k ចំណែក ដោយការអនុវត្តន៍តាម ទ្រឹស្តីបទ តាឡែស (par application du théorème de Thalès) ៖ ពីមុនមកសិស្សចេះត្រឹមតែ ចែក អង្កត់មួយ ជាពីរផ្នែកស្មើគ្នាប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះ តទៅនេះ យើងសន្មតត្រឹមតែ ស្វ័តស័ត្យចែក ដោយ 2 តែប៉ុណ្ណោះ (axiome de division par 2)។

III.ស្វ័យស័ត្យកង់ទ័រ (de Cantor) គេប្រើនៅ ក្នុងធរណីមាត្រថ្នាក់ជាន់ដំបូង ដើម្បីតាក់តែង នូវការស្មើ ដូចតទៅនេះ៖ បរិវេណ នៃពហុកោណ អថេរ (polygone variable)មានកំពូល នៅលើ រង្វង់មួយ (inscrit dans un cercle) នោះមានលីមីត (limite) កាលណាជ្រុងធំនៃ ពហុកោណ ខិតទៅរកសូន្យ (si le plus grand côté de ce polygone tend vers zéro)។ ក្រៅ

ពីចំណោទនេះ គេប្រើតែ កម្មសិទ្ធិនៃបន្ទាត់ដែលចេញពីការបន្ទាយទៅក្នុងប្លង់អឺគ្លីត (prolongement dans le plan euclidien) ។ កម្មសិទ្ធិនោះធ្វើអន្តរាគមណៅពេលដែលគេសិក្សាពី ការកាត់គ្នា រវាង បន្ទាត់និង រង្វង់ ។ គេសំអាងដោយគំនិតទៅលើ ការជាប់គ្នា (la continuité) ដោយអះអាងថា បន្ទាត់ ដែលកាត់ឆ្លងពី ចំណុចមួយនៅខាង ក្នុងរង្វង់ ទៅចំណុចមួយនៅខាងក្រៅរង្វង់ ត្រូវតែកាត់តាមរង្វង់នោះជាចាំបាច់ ។ បើយើងបកស្រាយនូវសញ្ញាណនៃការជាប់គ្នានេះ គេនឹងទៅដល់ សម្មតិកម្មដែលសមមូលនឹង ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ តែការសិក្សានេះត្រូវចេះឋានវិជ្ជាទូទៅ (*des connaissances de topologie générale*) ដែលរៀននៅថ្នាក់បរិញ្ញា។

យើងនឹងឃើញនៅ §10 ថាគ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ ដែលបំពេញតែ ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ និង ស្វ័យស័ត្យវិធីចែក នោះអ៊ីសូម៉ោស តែមួយផ្នែកនៃចំនួនពិត R តែប៉ុណ្ណោះ ។ នៅពេលណាដែលគេមិនទាន់បានបញ្ចូល ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ (ឬស្វ័យស័ត្យដែលសមមូល) ទេ នោះបន្ទាត់ធរណីមាត្រ នៅមិនទាន់កំណត់បានពេញលេញឡើយ ៖ គេគ្រាន់តែអាចនិយាយថា ជា សំនុំមួយ អ៊ីសូម៉ោស ទៅនឹងមួយផ្នែកនៃ R ហើយ នៅក្នុងនោះក៏មាន អង្គនៃរឹសការេ (*le corps des racines carrées*) ដែលយើងបានឃើញរួចមកហើយនៅ §V – 9 នៃជំពូក V ។

10. លក្ខណៈប្លែកនៃស្វ័យស័ត្យ ចំពោះចំនួនពិត (Caractérisation axiomatique des nombres réels).

យើងពុំទាន់បាន តាក់តែង អ៊ីសូមោហ្វីស៍ (isomorphie) រវាងអង្គ (des corps) ទាំងឡាយដែលសាងសង់ដោយ ការបំបែកគ្មានកម្រិត (construits au moyen de développements illiimités) នៅក្នុង ប្រព័ន្ធទាំងឡាយនៃការសរសេរចំនួន (dans les divers systèmes de numération) ៖ ដូច្នេះ ជាបណ្ដោះអាសន្ន យើងនៅតែតាងដោយ R_k អង្គ ដែលមានបាត

k ។ សូមបញ្ជាក់ថា យើងទុកឈ្មោះថា « គ្រុបអាបេលីអៀង មានលំដាប់ » គឺគ្រុប អាបេលីអៀង សរសេរដោយលេខបូក ហើយមានមានលំដាប់គ្រប់ៗធាតុ ដែលបំពេញ $a \le b \Rightarrow a+c \le b+c, \forall c$ ។ ដូច្នេះ វ៉ុឡាស្យុង $a < b \Rightarrow a+c < b+c$ ។ ជាពិសេសបើគេ តាងជានិច្ចថា na គឺ ផលបូកនៃ n ចំនួន ស្មើនឹង a នោះវិសមភាព $a < b \Rightarrow na < nb$ ដូច្នេះ បើមានធាតុ c មួយដែលបំពេញ $nc = a$ នោះធាតុ c គឺមានតែមួយគត់ ដែលគេអាចសរសេរច្បាស់ដោយ $\frac{1}{n}a$ ។ ដូច្នេះយើងអាច បង្ហាញនូវលទ្ធផលជាគ្រឹះមួយដូចតទៅ៖

ការស្នើ-VI-10-1.

G ជាគ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ បំពេញ ស្វ័យស័ត្យ (A) (ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ) នៅពេលនោះ ចំពោះធាតុ $u > 0$ ណាក៏ដោយនៃ G ហើយនិងចំនួនគត់ $k \ge 2$ នោះមានការអនុវត្តន៍ ឡើងជានិច្ច f មួយ (une application strictement croissante f) តែមួយគត់ ពី G ទៅ R_k ដែលបំពេញនូវល័ក្ខខ័ណ្ឌ ៖

(1) $f(0) = 0 \quad f(u) = 1 \quad f(a+b) = f(a) + f(b), \ \forall a \in G, \forall b \in G$ ។

បើសិនជាលើសពីនេះទៀត G បំពេញស្វ័យស័ត្យ (B) (ស្វ័យស័ត្យ វិធីចែកដោយ k) និងស្វ័យស័ត្យ (C) (ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ) នៅពេលនោះ f ប៊ីសេចទីវ ដែលអាចឲ្យនិយាយថា G អ៊ីសូម៉ោស (isomorphe) នឹងគ្រុបបូកនៃចំនួនពិត (au groupe additif des nombres réels)។

បង្ហាញ

បើមាន ការអនុវត្តន៍ f បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ (1) នោះយើងនឹងបាន $f(pu) = p$ ហើយ $f(k^n x) = k^n f(x) \ \forall p \in Z, x \in G$ និង $n \in N$ [ពីព្រោះ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$f(a+b) = f(a) + f(b)$ => បើ $a = b$ នោះ $f(a+a) = f(a) + f(a)$ =>

$f(2a) = 2f(a)$ ដូច្នេះ $f(pa) = pf(a)\ \forall p \in Z$] ហើយដោយ $k \in N$ និង $k > 2$

នោះ $k^n \in Z$ ដូច្នេះ $f(k^n x) = k^n f(x)$ ។

x ជាធាតុមួយទូទៅនៃ G យើងតាងដោយ p_n ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $(p_n \in Z)$ ដែលធំជាងគេ បំពេញ $p_n u \le k^n x$ ។

បើ f មាន នោះវិសមភាព $p_n u \le k^n x < (p_n + 1)u$ => $p_n \le f(k^n x) < p_n + 1$ [53]

ឬ $k^{-n} p_n \le f(x) < k^{-n}(p_n + 1)$ (**$S1$**) ។ ដោយ ចំនួនគត់ $k \ge 2$ នោះ $k^n x$ ជាស្វីតឡើង ដូច្នេះ $p_n u \le k^n x$ => p_n ឡើង ពីព្រោះជា p_n ជាចំនួនធំជាងគេដែលបំពេញ $p_n u \le k^n x$ => ដោយ $u > 0$ យើងបាន $p_n \le \frac{x}{u} k^n$ => $k^{-n} p_n \le \frac{x}{u}$

ដោយ $\frac{x}{u}$ មិនដូរ ទៅតាម ចំនួន n នោះ បើយើងតាង $y_n = k^{-n} p_n$ នោះ (y_n) ជាស្វីតឡើង ហើយ $y'_n = k^{-n}(p_n + 1)$ ជាស្វីត ចុះ ដោយ (**$S1$**) ។ ហើយគេបាន

$y'_n - y_n = k^{-n}$ [54] ដូច្នេះ បង្គោលខាងលើនៃ y_n (*la borne supérieure de* y_n) ស្មើនឹងបង្គោលខាងក្រោមនៃ y'_n (*la borne inférieure de* y'_n) ហើយចំនួន y (ជាតុនៃ R_k) ជាចំនួនតែមួយគត់ដែលបំពេញ វិសមភាពទាំងសង្ខាង $y_n \le y \le y'_n$ ចំពោះចំនួន n នីមួយៗ ។ បើ f មាន នោះនឹងបាន $y = f(x)$ ដែលបង្ហាញថា f កំណត់បានដោយរបៀបតែមួយគត់ គឺថា ចំនួន $y = f(x)$ ជាបង្គោលខាងលើនៃស្វីត $y_n = k^{-n} p_n$ ដែល p_n សំដៅនូវ ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $(p_n \in Z)$ ដែលធំជាងគេ បំពេញ $p_n u \le k^n x$ ។

---

[53] ពីព្រោះតាមសម្មតិកម្ម f ឡើងជានិច្ច

[54] ដោយ k ≥ 2 នោះ $k^n \to +\infty$ កាលណា $n \to +\infty$ => $k^{-n} = \frac{1}{k^n}$ -> 0 កាលណា $n \to +\infty$ នេះបានន័យថា ($y'_n - y_n$) ខិតជិតសូន្យកាលណា $n \to +\infty$ គឺថាស្វីត (y_n) និង ស្វីត (y'_n) មានលីមីត (*limite*) ជិតគ្នាដែរ ។ ហើយដោយ ស្វីតទាំងពីរនេះ មានបង្គោលតែមួយ គឺ $f(x)$ ដូច្នេះ ត្រូវតែ ស្វីត (y_n) ឡើង និង ស្វីត (y'_n) ចុះ ។

ដើម្បីបញ្ចប់ការបង្ហាញនូវផ្នែកទីមួយ នៃ ការស្មើនេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា អនុគមន៍ f ដែលបានមកនេះ បំពេញនូវ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ (1) ដែលចង់បាន៖

1° f កើនដាច់ (f *est strictement croissante*).

យើងយក $x' > x$ => $x' - x > 0$ ដូច្នេះតាមស្ម័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ គេអាចរក n មួយ ដែលឲ្យ $n(x' - x) > 2u$ ដូច្នេះ គេរិតតែបាន $k^n(x' - x) > 2u$ (កុំភ្លេចថា $k \geq 2$) ។ ហើយបើគេតាងដោយ p_n និង p'_n គឺចំនួនគត់ ដែលធំជាងគេបំផុត ដែលបំពេញ $p_n u \leq k^n x$ និង $p'_n u \leq k^n x'$ នោះយើងបាន $p'_n > p_n + 1$ [55]។

ខ្ញុំសូមរំលឹកឡើងវិញ នូវការកំណត់នៃ អនុគមន៍ f ៖

$p_n u \leq k^n x < (p_n+1)u$ => $k^{-n} p_n \leq f(x) < k^{-n}(p_n+1)$ (F1)

ដូច្នេះយើងបាន តាមនិយមន័យ p'_n

$f(x') \geq p'_n k^{-n} > (p_n+1)k^{-n} \geq f(x)$ => $f(x') > f(x)$ ។ដូច្នេះ f កើន ។

2°/ បើ $x = 0$ ដោយ (F1) $p_n u \leq k^n.0 < (p_n+1)u$ => $p_n = 0$ => $f(0) = 0$

ដោយយក $n = 0$ $k^n = 1$ ហើយ (F1) $p_n u \leq 1.u < (p_n+1)u$ => $p_n = 1$ => $f(u) = 1$

3°/ $f(a + b) = f(a) + f(b)$

យើងតាងដោយ p_n [ក៏ដូច q_n] ចំនួនគត់ដែលធំជាងគេបំពេញ $p_n u \leq k^n a$

---

[55] ពីព្រោះ $x' > x$ ។ ឧបមា $x = 1{,}1416$ ហើយ $x' = 1{,}1501$ ដោយ $k \geq 2$ បើ យើង យក $k = 10$ $u = 2$ នោះ $k^n(x' - x) > 2u$ ទៅជា 10^n (1,1501- 1,1416) > 2u ឬ $10^n(0{,}0085) > 4$ => $n = 3$ ដូច្នេះ $p_n u \leq k^n x$ ទៅជា $p_n \leq \frac{10^3}{2}(1{,}1416) = 570{,}8$ => $p_n = 570$ ។ ហើយក៏ដូចគ្នាចំពោះ $p'_n \leq k^n x'$ ទៅជា $p'_n \leq \frac{10^3}{2}(1{,}1501) = 575{,}05$ => $p'_n = 575$ ។ ដូច្នេះ $p'_n > p_n + 1$ ។

[ក៏ដូច $q_n u \le k^n b$] ។ ដោយ វិសមភាព៖

$k^{-n}p_n \le f(a) < k^{-n}(p_n+1)$ និង $k^{-n}q_n \le f(b) < k^{-n}(q_n+1)$ =>

$$k^{-n}(p_n+q_n) \le f(a)+f(b) < k^{-n}(p_n+q_n+2)$$

ម្យ៉ាងទៀត ៖ $(p_n+q_n)u \le k^n(a+b) < (p_n+q_n+2)u$ =>

ដូច្នេះដោយ (F1) $k^{-n}(p_n+q_n) \le f(a+b) < k^{-n}(p_n+q_n+2)$

ដូច្នេះ ចំនួន $f(a+b)$ និង $f(a)+f(b)$ មានចំនួនប្រហែល (*valeur approchée*) ស្មើគ្នា ចំពោះចំនួន n នីមួយៗ $(\forall n \in N)$ ដូច្នេះ $f(a+b) = f(a)+f(b)$ ។

ករណីដែល G ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងស្វ័យស័ត្យ(B)និង (C)

យើងចង់បង្ហាញថា f ប៊ីសេចទីវ ពី G ទៅ R_k ។ ដោយ f កើនជានិច្ច ដូច្នេះ f អាំងសេចទីវរួចទៅហើយ ដូច្នេះនៅតែបង្ហាញថា f ក៏ សៀសេចទីវដែរ ។ គឺថា ចំពោះធាតុ y មួយនៃ R_k នោះមានធាតុ $x \in G$ (xយ៉ាងហោចមួយ) ដែលបំពេញ $f(x) = y$ ។

បើ y [56] មានរាង $y = pk^{-n}$ ដោយ n និង p ជាចំនួនគត់ នោះយើងគ្រាន់តែយក $x = pk^{-n}u$ [ដោយស្វ័យស័ត្យ B មានចំនួនគត់ $k > 1$ មួយ ដែលកាលណាគេឲ្យធាតុ u មួយនៃ G នោះគេអាចផ្គូរ នឹង $u_n = k^{-n}$ ដែលឲ្យ $k^n u_n = u$] [57]។ ដូច្នេះបើ y ជាធាតុមួយនៃ R_k កំណត់ដោយស្វីត $y_n = p_n k^{-n}$ ដែលជាចំនួនប្រហែលមាន $k - décimales$ (k-ដេស៊ីមាល) នោះយើងអាចសាងសង់ស្វីត ពីរ $x_n = p_n k^{-n}u$ និង

$x'_n = (p_n+1)\, k^{-n}u$ ។

---

[56] បានជាយករាងបែបនេះ ដោយ រូមមន្ត (F1)

[57] ធាតុដែលគេឲ្យ គឺ ចំនួនគត់ $k \ge 2$ និង $u > 0$ ។ បើ k ជាចំនួនគត់ នោះ k^n ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ ដូច្នេះ តាមស្វ័យស័ត្យចែក B គេអាចចែក u ដោយ k^n ហើយគេបាន u_n ដែលបំពេញ $k^n u_n = u$ ។

ស្វ៊ីតទាំងពីរនេះ បំពេញ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ (1°) និង (2°) នៃស្វ៊ីតស័ត្យ កង់ទ័រ (ស្វ៊ីយស័ត្យ C)
ពីព្រោះ បើកាលណាគេឲ្យ ε នៃ G ដោយស្វ៊ីយស័ត្យ អារស៊ីមែដ នោះមានចំនួនគត់ p
ដែលបំពេញ $p\varepsilon \geq u$ => $\varepsilon \geq u \times \frac{1}{p} \geq u \times \frac{1}{k^p}$ (ពីព្រោះ k ចំនួនគត់ធំជាង 1)
ដូច្នេះ $\varepsilon \geq k^{-p}u$ ហើយចំពោះ $n > p$ នោះគេបាន

$x'_n - x_n = [(p_n + 1) - p_n]\, k^{-n}u = k^{-n}u \leq \varepsilon$ ។

ដូច្នេះ មានធាតុ x មួយនៃ G ដែលបំពេញ $x_n \leq x \leq x'_n$ ចំពោះចំនួន n ណាក៏ដោយ
$(\forall n)$ ហើយ វិសមភាព $f(x_n) \leq f(x) \leq f(x'_n)$ <=> $p_n k^{-n} \leq f(x) \leq (p_n + 1)k^{-n}$ =>
$f(x) = y$ ។

សង្កេត

បើ f ប៊ីសេចទីវ គេអាចកំណត់ វិធីគុណ នៅលើ G ដោយដាក់ $f(xy) = f(x)f(y)$ ហើយ
នៅពេលនោះ គេបាននៅលើ G មាន រចនាសម្ព័ន្ធមួយជា អង្គត្រលប់ (*on obtient sur G une structure de corps commutatif*) អ៊ីសូម៉ោស នឹង R_k ដោយយក u ជា
ឯកតា (*unité*) ៖ ការសាងសង់នេះ យកមកអនុវត្តិលើ បន្ទាត់ធរណីមាត្រ ដោយយក
$k = 2$ ហើយនិងលើ សំនុំនៃទំហំដែលអាចវាស់បាន នៅក្នុងពួកជាមួយគ្នា
(*et à l'ensemble des grandeurs mesurables d'une même espèce*) ៖ ការរើសយកឯក
តា អាចកំណត់ ផលគុណនៃ ពីរប្រវែង ហើយជាទូទៅ នៃ ពីរទំហំដែលអាចវាស់បាននៅ
ក្នុងពួកជាមួយគ្នា ។ ហើយនៅក្នុងសំនុំនោះ (បន្ទាត់ឬ ទំហំដែលអាចវាស់បាន) គេបាន
ប្រព័ន្ធនៃ អង្គត្រលប់ (*une structure de corps commutatif*)។ យើងនឹងសង្កេតឃើញថា
នៅលើអង្គទាំងអស់ដែលយើងបាននោះ វិសមភាព $a \leq b$ និង $c \geq 0$ => $ac \leq bc$ ។

ផ្ទុយទៅវិញ យើងទុកឈ្មោះ អង្គត្រលប់មានលំដាប់ សម្រាប់អង្គត្រលប់ ដែលមានរ៉ឺឡាស្យុងលំដាប់ទាំងមូល (*relation d'ordre totale*) គឺថា $a \le b \Rightarrow a+c \le b+c$, $\forall c$ ហើយនិង $ac \le bc$, បើ $c \ge 0$ ។ យើង អាចសន្មតថា G មានរចនាសម្ព័ន្ធ ជាអង្គត្រលប់មានលំដាប់ ហើយនៅពេលនោះ យើងការស្មើដូច តទៅនេះ៖

<u>*ការស្មើ*-VI-10-2.</u>

***K* ជាអង្គ ត្រលប់ មានលំដាប់ បំពេញស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ។**

បំពោះចំនួនគត់ k ណាក៏ដោយ ដែល ធំជាងឬស្មើនឹង 2 ($k \ge 2$) នោះគេមាន ការអនុវត្តន៍ ឡើងជានិច្ច f តែមួយគត់ ពី K ទៅ R_k ដែល បំពេញ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ និង $f(a\,b) = f(a)f(b)$, $\forall a \in K$, $\forall b \in K$ ។

បើ លើសពីនេះទៅទៀត K បំពេញស្វ័យស័ត្យ (B) (ស្វ័យស័ត្យកង់ទ័រ) នៅពេលនោះ f ប៊ីសេចទីវ ដែលធ្វើឲ្យ K អ៊ីសូម៉ោស (*isomorphe* à) នឹង R_k ។

ដើម្បីនឹងបង្ហាញ ការស្មើនេះ ជាដំបូងយើងសង្កេតនូវ អង្គ ដែលបំពេញស្វ័យស័ត្យចែកដោយ k (ស្វ័យស័ត្យកង់ទ័រ)ចំពោះចំនួនគត់ k ណាក៏ដោយដែលធំជាង 1 ($k > 1$) ។ បន្ទាប់មក យើងយក ការស្មើ VI-10-1 មកអនុវត្តលើ K។ ហើយដល់ចុងក្រោយ ដើម្បីបង្ហាញ រ៉ឺឡាស្យុង $f(a\,b) = f(a)f(b)$ យើងប្រើរបៀបដូចកាលយើងប្រើសម្រាប់បង្ហាញ រ៉ឺឡាស្យុង $f(a+b) = f(a) + f(b)$ ។

<u>**អនុសាធ (*Corollaire*)**</u>

គ្រប់ អង្គ R_k សុទ្ធតែ អ៊ីសូម៉ោស នឹងគ្នា ទាំងអស់ ។

យើងដឹងថា អង្គ នីមួយៗ R_k ដូចជា R_{10} ជាដើម បំពេញស្វ័យស័ត្យកង់ទ័រ

(ការស្មើ VI-7-6) ។ ម្យ៉ាងទៀត អង្គទាំងនោះ សុទ្ធតែបំពេញ ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ ។ តើដោយហេតុអ្វី? ពីព្រោះថា បើ a និង b ជាធាតុពីរ នៃ R_k ហើយបើ $a > 0$ នោះគេអាចរកចំនួនគត់ p និង q ដែលឲ្យ $k^{-p} < a$ នឹង $q > b$ ។ ហើយ ចំពោះ $n > q\,k^p$ គេបាន ៖ $\begin{matrix} n > qk^p \\ a > k^{-p} \end{matrix} \Big| \Rightarrow na > q > b$ ។

រួមសេចក្តីទៅ បើ a និង b ជាធាតុពីរនៃ R_k នោះមានចំនួនគត់ n ដែលឲ្យ $na > b$ ។ ដូច្នេះ យើងអាច ប្រើ ការស្មើ (VI-10-2) បានដោយយកជាអង្គ K នូវអង្គណាមួយ នៃ R_k ដូចជា R_{10} ឬ R_2 ជាដើម ហើយយើងក៏បាននូវលទ្ធផលដែលបានប្រកាសខាងលើ ។

ការសន្និដ្ឋាន

អំណើះតទៅ យើងអាចនិយាយ ដោយមិនផ្តុយថា គ្រប់អង្គ R_k ដូចគ្នាទាំងអស់ (*tous les corps R_k sont identiques*)។ អង្គតែមួយនោះ (ប្រហែលគ្នាដោយអ៊ីសូម៉ោហ្វីស – *déterminée à un isomorphisme près*) នឹងតាងដោយ R ហើយហៅថា « បន្ទាត់នៃចំនួន (*droite numérique*) » ជាតុរបស់វា ហៅថាចំនួនពិត ហើយជាតុ នៃ R_k អាចហៅថា ការសរសេរចំនួនពិតនៅក្នុងប្រព័ន្ធនៃបាត k (*la représentation des nombres réels dans le système de base k*) ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងដឹងថា បន្ទាត់ធរណីមាត្រ អ៊ីសូម៉ោសនឹង បន្ទាត់នៃចំនួន ហើយរង្វាស់នៃទំហំដែលអាចវាស់បាន គឺជាចំនួនពិត ។

ជាចុងក្រោយ យើងអាច អនុវត្ត ការស្មើ (VI-10-1) មកលើ R តែម្តង ដោយយក u ជាចំនួនពិត វិជ្ជមាន មិនសូន្យ ជាទូទៅណាមួយ ($u \in R$ និង $u > 0$) ។ ដូច្នេះយើងឃើញថា មានការអនុវត្តន៍ f កើនជានិច្ច តែមួយគត់ ពី R ទៅ R ដែល បំពេញ $f(u) = 1$ និង $f(a+b) = f(a) + f(b), \ \ \forall a \in R, \ \forall b \in R$ ។ អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$f(x)=\frac{x}{u}$ ក៏បំពេញ លក្ខខ័ណ្ឌនេះដែរ ហើយយើងអាចថ្លែងថា៖

ការស្នើ-VI-10-3.

ការអនុវត្តន៍ កើនជានិច្ច ពី R ទៅ R ដែល បំពេញ

$f(a+b)=f(a)+f(b),\quad \forall a\in R,\ \forall b\in R$ នោះត្រូវតែ លីណេអែរ (linéaire)

គឺថាមានរាង ជា $f(x)=\lambda x$ ចំនួនពិត λ រីដ្ឋមាន ខុសពីសូន្យ $(\lambda>0)$ ។

$f(x)=\lambda x$ ជា សមីការ នៃបន្ទាត់ ដូចជា $y=ax$ ជាបន្ទាត់កាត់តាម គល់ o ។

<u>ប្រព័ន្ធនៃ ស្វ័យស័ត្យផ្សេងទៀត (*Autres systèmes d'axiomes*)</u>

គេអាច ប្រឌិតប្រព័ន្ធស្វ័យស័ត្យផ្សេងពីនេះដើម្បីកំណត់លក្ខណៈនៃចំនួនពិត។ ជាពិសេសគេអាចជំនួស ស្វ័យស័ត្យ ចែក(B) ដោយ ស្វ័យស័ត្យតទៅនេះ ដែលជាផលវិបាក នៃស្វ័យស័ត្យ (B) ហើយមានការ កម្រិតតិចជាង ៖

D) ***ចំពោះធាតុ a , b ណាក៏ដោយ ដែលបំពេញ $a<b$ នោះមាន ធាតុ c មួយ ដែលឲ្យ $a<c<b$ (វិសមភាព ដាច់ខាត - inégalité stricte) ។***

បើនិយាយតាមធរណីមាត្រ ស្វ័យស័ត្យនេះ ថ្លែងថា ៖ នៅចន្លោះ ពីរចំណុច នៃបន្ទាត់ គេមានជានិច្ច នូវចំណុចទី បី ។ ស្វ័យស័ត្យនេះ ផ្ទៀងផ្ទាត់ បើគេសន្មតថា អង្កត់នីមួយៗ មាន កណ្ដាល (*un segment admet un milieu*) ។

========================= **ចប់ ចំនួនពិត** ==========================

តទៅនេះ មានលំហាត់ខ្លះ

*

VI-11 លំហាត់មានចម្លើយ

រំឭកឡើងវិញនូវ ការកត់ត្រា និង និយមន័យខ្លះ

Δ = D.D.I (*Développement Décimal Illimité*) : ការពង្រីក ដេស៊ីមាល គ្មានព្រំដែន

$\Delta_9 = D.D.I.$ ដែលមានដេស៊ីមាលខុសពី លេខ 9 មានចំនួន មានកម្រិតគឺថាមានព្រំដែន

($D.D.I.$ *qui ne possède qu'un nombre fini de décimals différents de* 9)

$\Delta_0 = D.D.I.$ ដែលមានដេស៊ីមាលខុសពី លេខ 0 មានចំនួន មានកម្រិតគឺថាមានព្រំដែន

($D.D.I.$ *qui ne possède qu'un nombre fini de décimals différents de* 0)

D = ចំនួន ដេស៊ីមាល ធម្មតា ដែលយើងធ្លាប់ប្រើរាល់ថ្ងៃ

ដូច្នេះ ចំនួនដេស៊ីមាលនៅក្នុង D មានដំណាងពីរ នៅក្នុង $D.D.I.$

-ដំណាងមួយ ជាធាតុនៅក្នុង Δ_0 ហៅថាចំនួនដេស៊ីមាលស្មើជ្រុង

(*nombre décimal régulier*)

-ដំណាងមួយ ជាធាតុនៅក្នុង Δ_9 ហៅថាចំនួនដេស៊ីមាល មិនស្មើជ្រុង

(*nombre décimal irrégulier*) ។

ចំនួនដេស៊ីមាល មិនមានព្រំដែន ដែលមានដំណាងតែមួយគត់នៅក្នុង $D.D.I.$ គឺ មិននៅក្នុង Δ_0 ផង និងមិននៅក្នុង Δ_9 ផង។

សំនុំនៃចំនួនពិត $R = \Delta - \Delta_9$ គឺ ជា ផ្នែកមួយនៃ Δ ៕

លំហាត់ទី១

គេឲ្យ $x = x_0, x_1 \ldots\ldots x_n \ldots\ldots$, ចំនួនពិតតាងដោយ ការពង្រីកដេស៊ីមាលស្មើជ្រុង ។

គេផ្គូ x ទៅនឹង y ដោយ $y = f(x)$ កំណត់ដោយការពង្រីកដេស៊ីមាល (មិនចាំបាច់ ស្មើ

ជ្រុង ទេ) $y = x_0, x_2x_4 \ldots\ldots x_{2n}\ldots\ldots$ បានឡើងដោយយក តួនៃ x ដែលមានសន្ទស្សន៍ គូ $(indice\ pair)$ ក្នុងការពង្រីក ។

$a)$ បង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់ nមួយ គេអាចផ្គូនឹងចំនួនគត់ $p \geq n$ មួយដែល វិសមភាព $x' < x + 10^{-2p}$ => $f(x') < f(x) + 10^{-p}$ [គេគ្រាន់តែ យក $p \geq n$ ហើយដែល $x_{2p} \neq 9$ នៅពេលនោះ x' មាន $2p - 1$ ដេស៊ីមាលដំបូង ស្មើនឹង x]

$b)$ គេ សន្មត់ថា x មិនមែនជា ដេស៊ីមាលធម្មតា

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់ nមួយ គេអាចផ្គូនឹងចំនួនគត់ $q \geq n$ ដែល វិសមភាព $x' > x - 10^{-2q}$ =>

$f(x') > f(x) - 10^{-q}$ [គេគ្រាន់តែ យក $q \geq n$ ហើយដែល $x_{2q} \neq 0$ នៅពេលនោះ x' មាន $2q - 1$ ដេស៊ីមាលដំបូង ស្មើនឹង x]

$c)$ គេ សន្មត់ថា x ជាចំនួនដេស៊ីមាលធម្មតា (គឺថា $x \in \Delta_0 \cup \Delta_9$) ដែលមាន ដេស៊ីមាលចុងក្រោយគេបំផុតខុសពីសូន្យ មានលេខរៀង ជាចំនួនសេស គឺ $x = x_0, x_1 \ldots\ldots x_{2n+1}$ ដោយ $x_{2n+1} \neq 0$។ រក $f(x)$ និង $f(x - 10^{-p})$ ចំពោះ $p > 2n + 1$ ។ បង្ហាញថា $f(x - 10^{-p}) - f(x) > 9.10^{-n-1}$ ។ [លំហាត់នេះ ឲ្យយើងនូវ អនុគមន៍ ជាប់ ចំពោះ ចំណុចខ្លះ និងដាច់ ចំពោះចំណុចផ្សេង]។

<u>ចម្លើយ</u>

$a)$ បើ $x = x_0, x_1x_2 \ldots\ldots x_n \ldots x_{2p-1}x_{2p} \ldots\ldots$ នោះ $f(x) = x_0, x_2x_4 \ldots\ldots\ldots x_{2p} \ldots\ldots\ldots$

ចំពោះ n ដែលគេ កំណត់ នោះគេអាចរក $p \geq n$ ដែលចំពោះ $x' < x + 10^{-2p}$ => $f(x') < f(x) + 10^{-p}$ ។ តាមការនៃនាំខាងលើ គេគ្រាន់តែនៅក្នុង x ចាប់តាំងពី ជួ n ឡើងទៅ គេយកជួ p ណាមួយ ដែលមាន ដេស៊ីមាល ខុសពី លេខ 9 នៅពេលនោះ

ចំពោះ x' ដែលស្មើនឹង x តាំងពី ជួទី១ រហូតដល់ជួទី $2p-1$ គេនឹងបានចម្លើយនៃសំណួនេះ។ ពីព្រោះ ៖ ឧបមា ជួ $2p$ នៃ x មាន 6 ជាដេស៊ីមាល នោះ

$x = x_0,x_1x_2\ldots\ldots x_n\ldots x_{2p-1}x_{2p}\ldots\ldots = x_0,x_1x_2\ldots\ldots x_n\ldots x_{2p-1}6\ldots\ldots$ =>

$x + 10^{-2p} = x_0,x_1x_2\ldots\ldots x_n\ldots x_{2p-1}6\ldots\ldots + 10^{-2p} = x_0,x_1x_2\ldots\ldots x_n\ldots x_{2p-1}7\ldots\ldots$

ដោយ $x' = x_0,x_1x_2\ldots\ldots x_n\ldots x_{2p-1}$ => $x' < x + 10^{-2p}$ ។ ដូច្នេះ

$f(x+10^{-2p}) = x_0,x_2\ldots\ldots x_{2p-2}7\ldots\ldots$ (1) ហើយ

$f(x') = x_0,x_2\ldots\ldots x_{2p-2}$ (2)

តែត្រូវសង្កេតថា ពីព្រោះអនុគមន៍ f ផ្នែកដេស៊ីមាល នៃ ចំនួន x និងផ្នែកដេស៊ីមាលនៃចំនួន $f(x)$ មិនស្មើគ្នាទេ ៖ បើផ្នែកដេសស៊ីមាល នៃ x មាន $2p$ ជួ នោះផ្នែកដេស៊ីមាលនៃ $f(x)$ មានតែ $\frac{2p}{2}$ ជួតែប៉ុណ្ណោះ ពីព្រោះ f យកតែជួគត់គូ les termes de rang pair) នៃផ្នែកដេស៊ីមាល។ យើងសង្កេតមើល (1) ផ្នែកដេស៊ីមាន នៃ $f(x+10^{-2p})$ គឺ

$x_2\ldots\ldots x_{2p-2}7\ldots\ldots = x_2\ldots\ldots x_{2(p-1)}7\ldots\ldots$ => 7 នៅជួទី p បន្ទាប់ពី $x_{2(p-1)}$ បានន័យថា $7.10^{-p} = (6+1)\,10^{-p} = 6.\,10^{-p} + 10^{-p}$ ។ បើយើងប្រៀបធៀប (1) និង (2) យើងឃើញថា $f(x') < f(x) + 10^{-p}$ បើកាលណា $x' < x + 10^{-2p}$ ។

$b)$ គេ សន្មត់ថា x មិនមែនជា ដេស៊ីមាលធម្មតា។ ដូច្នេះ x មិននៅក្នុង $\Delta_0 \cup \Delta_9$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ $q \geq n$ គេអាចរក ដេស៊ីមាល $x_{2q} \neq 0$ បាន ។របៀបបង្ហាញ ដូចគ្នានឹងសំណួរ $a)$ ដូច្នេះចូររកដោយខ្លួនឯងទៅ ។ ខ្ញុំគ្រាន់តែលើកយកឧទាហរណ៍ដូចតទៅ៖

ចំពោះ $n = q = 2$ ហើយ $x = x_0,x_1x_2x_3x_4\ldots\ldots = x_0,4531\ldots\ldots$ =>

$x - x_0,4531\ldots\ldots\ x_0,4531\ldots\ldots - 10^{-4} = x_0,4531\ldots\ldots - 0,0001 = x_0,4530\ldots\ldots$

$x' = x_0,4531$ ។ ដូច្នេះ៖

$x' > x - 10^{-4}$ ហើយ $f(x) = x_0,51$, $f(x) - 10^{-2} = x_0,51 - 0,01 = x_0,50$ (1)

$f(x') = x_0,51$ (2) ។ ដូច្នេះដោយ (1) និង (2) យើងឃើញ $f(x') > f(x) - 10^{-q}$ ។

$c)$ គេ សន្មត់ថា x ជាចំនួនដេស៊ីមាលធម្មតា ដែលមាន ដេស៊ីមាលចុងក្រោយគេបំផុត ខុសពីសូន្យ មានលេខរៀង ជាចំនួនសេស គឺ $x = x_0, x_1 \ldots\ldots x_{2n+1}$ ដោយ $x_{2n+1} \neq 0$។

ឧបមា គឺ $x = x_0, x_1x_2x_3x_4 7000$ នៅពេលនេះ $2n + 1 = 5$ ហើយ $x_5 = 7, x_6 = 0,$

$x_7 = 0, x_8 = 0$, $2n + 1 = 5 \Rightarrow n = 2$ ហើយ $p > 2n + 1$, យើងយក $p = 8$ ។

ដូច្នេះយើងបាន ៖

$x - 10^{-p} = x_0, x_1x_2x_3x_4 7000 - 10^{-8} = x_0, x_1x_2x_3x_4 7000 - 0,0000\,0001$

$= x_0, x_1x_2x_3x_4 6999$ ។ ដែលឲ្យតាមនិយមន័យ នៃ អនុគមន៍ f

$f(x - 10^{-8}) = x_0, x_2x_4 99$ ហើយ $f(x) = x_0, x_2x_4 00$ ដូច្នេះ

$f(x - 10^{-8}) - f(x) = x_0, x_2x_4 99 - x_0, x_2x_4 00 = 0,0099 = 99.10^{-4}$

$= 9,9.10^{-3} > 9.10^{-3} = 9.\,10^{-n-1}$ ។

<u>សង្កេត</u>

តាមនិយមន័យ នៃ អនុគមន៍ជាប់ នៅលើ R ត្រង់ចំណុច $x_0 \in R$ (*définition de la fonction continue au point* $x_0 \in R$) ៖

$\forall \varepsilon > 0, \exists \theta$ ដែលចំពោះ $x - x_0 < \theta \Rightarrow f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ (ដោយ $x \in R,\ x_0 \in R$) ។

តាមនិយមន័យនេះ ចំពោះអនុគមន៍ f នៃលំហាត់នេះ យើងឃើញថា f ជាប់ ចំពោះ សំណួរ $a)$ និង $b)$ ហើយ f ដាច់ ចំពោះសំណួរ $c)$ ៕

<u>លំហាត់ទី២</u>

គេឲ្យ x ចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង មិនមែនជាចំនួនគត់ ហើយគេតាងដោយ $[x]$ ផ្នែកនៃ ចំនួនគត់។ គេតាងដោយ $f(x) = \frac{1}{x-[x]}$ ($[x]$ ជាចំនួនគត់ធំជាងគេបំផុត ដែលបំពេញ $[x] \leq x$)។

$a)$ បើ x ជាចំនួនសនិទាន ចូរបង្ហាញថា $f(x)$ តាងដោយ ប្រភាគមិនអាចបម្រួញបាន $(fraction\ irréductible)$ ដែលមានភាគបែង តូចជាដាច់ខាត $(strictement\ plus\ petit)$ ជាង ភាគបែងនៃប្រភាគដំណាង x ។

$b)$ ដោយសន្មតថា x ជាចំនួនសនិទានដដែល ចូរបង្ហាញថា គេមានស្វ៊ីតមានដែនកំណត់ $(une\ suite\ finie)$ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ ដែលបំពេញ $x_1 = f(x), x_2 = f(x_1), \ldots,$ $x_{k+1} = f(x_k)\ldots\ldots, x_n = f(x_{n-1})$ ហើយដែល x_n ជាចំនួនគត់។ [គ្រាន់តែបង្ហាញថា ស្វ៊ីតនៃ ភាគបែង $(dénominateur)$នៃប្រភាគមិនអាចបម្រួញបាន ដែលជាតួនៃស្វ៊ីតនោះ ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច ជាដាច់ខាត$(la\ suite\ des\ dénominateurs\ des\ fractions\ irréductibles$ $réprésentant\ les\ termes\ de\ cette\ suite\ est\ strictement\ décroissante)$]

$c)$ ដោយទាញយកពីលទ្ធផលខាងលើនេះ ចំនួនសនិទានណាក៏ដោយ អាច តាងដោយ (របៀបតែមួយ) ដោយប្រភាគមានរាង

$$x = y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{\ddots \; y_{n-1} + \cfrac{1}{y_n}}}}$$

(គេតាង $y_0 = [x]$ ហើយ $y_k = [x_k]$ ចំពោះ $k \leq n$)

ដោយហេតុនេះ ប្រភាគបែបនេះគេ តាងដោយរូបនិមិត្ត $(y_0, y_1, \ldots\ldots, y_n)$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

$a)$ យើងយកប្រភាគ $x = \frac{a}{b}$ ។ ដែលយើងអាចសរសេរ ជា ៖

$a = bq + r_1$ ដោយ $r_1 < b \Rightarrow x = \frac{a}{b} = q + \frac{r_1}{b}$, $r_1 < b$ ។ដូច្នេះ

$f(x) = \frac{1}{x-[x]} = \frac{1}{q+\frac{r_1}{b} - q} = \frac{1}{\frac{r_1}{b}} = \frac{b}{r_1}$ ។ ដោយ $r_1 < b$ ដូច្នេះ ប្រភាគ $\frac{b}{r_1}$ មានភាគបែង តូចជាងភាគបែងនៃ x ហើយបើសិនជា b មិនមែនជាចំនួនបឋម

ទេ នោះគេអាចបម្រួញ $\frac{b}{r_1}$ ឲ្យទៅជា ប្រភាគមិនអាចបម្រួញបាន។ តែបើ b ជាចំនួនបឋម នោះប្រភាគ $\frac{b}{r_1}$ ជាប្រភាគមិនអាចបម្រួញបាន ។

រួមសេចក្តីទៅ យើងបានរូបមន្ត ៖

*

$x = \frac{a}{b}$, => $f(x) = \frac{1}{x-[x]} = \frac{b}{r_1}$ ដោយ $r_1 < b$ និងជាសំណល់ នៃការចែក a ដោយ b ។	(1)

$b)$ ដោយសន្មតថា x ជាចំនួនសនិទានដដែល ។ ដោយ

$x_1 = f(x) = \frac{1}{x-[x]} = \frac{b}{r_1}$ => $x_2 = f(x_1) = \frac{1}{x_1 - [x_1]} = \frac{r_1}{r_2}$ ដោយ r_2 ជាសំណល់នៃការចែក b ដោយ r_1 ។ ដូច្នេះ $r_2 < r_1$ (នេះដោយប្រើរូបមន្ត (1) ខាងលើ) ។ ហើយបើយើងបន្ត ការគណនា របៀបនេះតទៅទៀត យើងនឹងបានស្វីត $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n$ ។ ដោយ $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots\ldots\ldots > r_{n-1} > r_n$ នោះនៅពេលណាមួយ យើងបាន $r_{n-1} \neq 0$ ហើយ $r_n = 0$ ។ បើយើងមើលឡើងវិញនូវរបៀបគណនានេះ យើងបានសរសេរ ៖

$a = bq + r_1$ ដោយ $r_1 < b$

$b = r_1 q_1 + r_2$ ដោយ $r_2 < r_1$

$r_1 = r_2 q_2 + r_3$ ដោយ $r_3 < r_2$

……………………………………………….

$r_k = r_{k+1} q_{k+1} + r_{k+2}$ ដោយ $r_{K+2} < r_{k+1}$ ។ ដោយសំណល់ r_i ចេះតែចុះជានិច្ច នោះយើងអាចថា $r_{k+2} = 0$ ហើយនៅពេលនោះប្រភាគ $\frac{r_k}{r_{k+1}} = q_{k+1}$ ទៅជាចំនួនគត់ ។ ដោយបានចំនួនគត់នេះហើយ ដល់យើងឡើងទៅរហូតដល់ប្រភាគខាងដើមវិញនោះ

ក៏ដូចជាយើងបានគណនា ប្រភាគ $\frac{a}{b}$ ដែរ ដែលជាសំណួរ c) នៃលំហាត់នេះ។

c) ដោយទាញយកពីលទ្ធផលខាងលើនេះ ចំនួនសនិទានណាក៏ដោយ អាច តាងដោយ (របៀបតែមួយ) ដោយប្រភាគមានរាង

$$x = y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{y_{n-1} + \cfrac{1}{y_n}}}}}$$

(គេតាង $y_0 = [x]$ ហើយ $y_k = [x_k]$ ចំពោះ $k \le n$)

ដើម្បីងាយយល់ រូបមន្ត ដែលយើងត្រូវបង្ហាញនេះ យើងគណនា y_0, y_1 ជាមុនសិន បន្ទាប់មក ដោយ រូបមន្តនេះ វ៉ែគារង់ នោះយើងអាចបង្ហាញតាមវ៉ែគារង់ ។

យើងបានបានគណនា x នៅសំណួរ a) និង b) ហើយយើងបាន៖

$x = \frac{a}{b} \Rightarrow a = bq + r_1 ,\ r_1 < b \Rightarrow x = \frac{a}{b} = q + \frac{r_1}{b}$ ។ ដោយ $r_1 < b$ នោះដើម្បី គណនា $\frac{r_1}{b}$ គេណនា $\frac{b}{r_1}$ វិញ ដើម្បី បានផ្នែកគត់ នៃប្រភាគ ហើយម្យ៉ាងទៀត $\frac{r_1}{b} = \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$ ។

ដោយ $b > r_1 \Rightarrow b = r_1 q_1 + r_2 ,\ r_2 < r_1 \Rightarrow \frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1}$ ។

រួមសេចក្តីទៅយើងបាន៖

$[x] = q \Rightarrow y_0 = q$ ហើយ ដោយ b) $x_1 = \frac{b}{r_1} \Rightarrow y_1 = [x_1] = y_1 = [x_1] = q_1$ ។

ដូច្នេះ $x = q + \frac{r_1}{b}$ ទៅជា $x = y_0 + \frac{r_1}{b} = y_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = y_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}} = y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{r_2}{r_1}}$ ។

ដើម្បីសរសេរ រូបមន្ត វ៉ែគារ៉ង់ យើងសង្កេតមើល តួទាំងឡាយចំពោះ $n = 1$ នៅខាងលើនេះ យើងឃើញថា $y_1 = q_1$ ហើយ q_1 បានដោយ ចែក b និង r_1 ហើយ r_2 ជាសំណល់នៃការចែកនោះ គឺថា $r_2 < r_1$ ដូច្នេះបើយើងធ្វើបន្តទៅទៀត គឺយើងបាន $y_2 + \frac{r_2}{r_3}$ ដោយ $y_2 = q_2$ បានដោយ ចែក r_1 និង r_2 ហើយ r_3 ជាសំណល់នៃការចែក នោះ គឺថា $r_3 < r_2$ ហើយ រូបមន្ត ចំពោះ $n = 2$ ទៅជា ៖

$x = y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2 + \frac{r_3}{r_2}}}$ ដោយ $r_1 > r_2 > r_3$ ....

តែដោយ $\frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$ នោះ គេ គណនា $\frac{r_2}{r_3}$ ជាមុនសិន បន្ទាប់មកបានគេគណនា $\frac{r_3}{r_2}$ ដោយយកចំរាសៗ តែដោយ សំណល់ r_i ចុះជានិច្ច នោះដល់ $i = n+1$ សំណល់ $r_{n+1} = 0$ ហើយ q_n ទៅជាចំនួនគត់ៗ គឺថា

$r_{n-1} = r_n q_n + r_{n+1}$ ហើយដោយ $r_{n+1} = 0$ នោះ ប្រភាគ $\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n$ ទៅជាចំនួនគត់ៗ ហើយរូបមន្ត វេគារ៉ង់ ក៏ចប់នៅពេលនោះ ។

ដូច្នេះ $\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{y_n}$ => $x = y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2 + \frac{r_3}{r_2}}}$

....

$\frac{1}{y_{n-1} + \frac{1}{y_n}}$ ។

ដោយរូបមន្តនេះ យើងសង្កេតឃើញថា ប្រភាគ x អាចសម្តែងដោយ ស៊ីត $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ដែលតួនីមួយៗជាចំនួនប្រភាគដែរ ។ តទៅនេះយើងយកឧទាហរណ៍ដោយ យកប្រភាគ $x = \frac{96}{7}$ ។ ដោយយកការកត់ត្រាដដែល យើងបាន ៖

$a = 96$ និង $b = 7$

$a = bq + r_1 \quad (r_1 < b)$ => $x = \frac{a}{b} = q + \frac{r_1}{b}$ គឺថា $x = \frac{96}{7} = 13 + \frac{5}{7}$ => $q = y_0 = 13$ (1)

$\frac{b}{r_1} = \frac{7}{5} = b = r_1 q_1 + r_2 \quad (r_2 < r_1)$ => $\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1}$ គឺថា $\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$ => $q_1 = y_1 = 1$ (2)

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{2}$ => $r_1 = r_2 q_2 + r_3 \quad (r_3 < r_2)$ => $\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2}$ គឺថា $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ => $q_2 = y_2 = 2$ (3)

$\frac{r_2}{r_3} = \frac{2}{1}$ => $r_2 = r_3 q_3 + r_4 \quad (r_4 < r_3)$ => $\frac{r_2}{r_3} = q_3 + \frac{r_4}{r_3}$ គឺថា $\frac{2}{1} = 2 + \frac{0}{1}$ => $q_3 = y_3 = 2$ (4)

<u>សង្កេត</u>

a)នៅ (4) សំណល់ $r_4 = 0$ ដូច្នេះ $\frac{r_2}{r_3}$ ជាចំនួនគត់ ។ តែចំពោះ (1) (2) (3) ដោយ សំណល់ r_1, r_2, r_3 ខុសពីសូន្យ នោះ $\frac{b}{r_1}$ ឬ $\frac{r_1}{r_2}$ មានផ្នែកគត់ (y_1) ឬ (y_2) បូកនឹង

ប្រភាគ $\frac{r_2}{r_1}$ ឬ $\frac{r_3}{r_2}$ ។

b) យើងធ្លាប់ជួប្រភាគ $\frac{p}{q}$ ដោយ p និង q ជាចំនួនគត់ ។ តែបើ q ប្រភាគដែរ នោះយើងគណនា $\frac{p}{q}$ របៀបណា ។ ឧបមា $q = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ នោះយើងសរសេរ ៖

$F = \frac{p}{q} = \frac{p}{a/b} = \frac{p\times\frac{b}{a}}{a/b\times\frac{b}{a}}$ (ដោយគុណ ភាគយក និងភាគបែង ដោយចំនួនតែមួយគឺ $\frac{b}{a}$ ប្រភាគច្រាសនៃ $\frac{a}{b}$) នៅពេលនោះយើងបាន ៖

$F = p\times\frac{b}{a} = \frac{pb}{a}$ ពីព្រោះភាគបែង $a/b\times\frac{b}{a} = 1$ ។

b) យើងធ្លាប់ដឹងហើយថា នៅក្នុងគ្រុប Z ដែលមាន លេខបូក នោះសូន្យ ជាធាតុនប៉ុសកលឹង្គ ហើយ ធាតុផ្ទុយ នៃ x គឺ $-x$ ពីព្រោះ $x + (-x) = 0$ ។

ក៏ដូចគ្នាដែរ នៅក្នុង Q ដែលមានលេខ គុណ នោះ មួយ ជាធាតុ

នប៉ុសកលឹង្គ ហើយ ធាតុច្រាស នៃ x ដែលខុសពីសូន្យ គឺ $\frac{1}{x}$ ពីព្រោះ $x\times\frac{1}{x} = 1$ ។

ដូច្នេះ បើ $x = \frac{r_1}{r_2}$ នោះ ច្រាសនៃ x គឺ $\frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$ ។

ឥឡូវយើងត្រឡប់មក លំហាត់វិញ ។ យើងប្រើ លទ្ធផលនៃ (1) (2) (3) (4)

$x = 13 + \frac{5}{7}$

$= 13 + \frac{1}{\frac{7}{5}} = 13 + \frac{1}{1+\frac{2}{5}}$ ដោយ (2)

$= 13 + \frac{1}{1+\frac{2}{5}} = 13 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{5}{2}}} = 13 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ (ដោយ (3))

$= 13 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = 13 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{2}{1}}}} = 13 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ (ដោយ (4)) ។

បើសរសេរតាម រូបមន្ត យើងបាន ៖

$x = y_0 + \frac{1}{y_1+\frac{1}{y_2+\frac{1}{y_3}}}$ ដោយ $y_0 = 13,\ y_1 = 1, y_2 = 2,\ y_3 = 2$ ។

សង្កេត

ចំពោះប្រភាគ $x = \frac{96}{7}$ បើយើងធ្វើលេខចែកធម្មតា នោះដោយ 7 ជាចំនួនបឋម ហើយដោយ 96 ចែក នឹង 7 មិនដាច់ នោះបានន័យថា មានសំណល់ជានិច្ច។ ហើយដោយសំណល់ត្រូវតែតូចជាង 7 ហើយនៅទីនេះ ខុសពី សូន្យទៀត នោះសំណល់មានតែ 1, 2, 3, 4, 5, 6 តែប៉ុណ្ណោះ ។ ដូច្នេះបើយើងចេះតែបន្តលេខចែកនេះ ហួសពី ៧ ដងបន្ទាប់ពីដាក់កណ្ដក់សញ្ញាទៅ នោះយើងនឹងឃើញសំណល់ដដែលនេះម្ដងទៀត។ ឧបមាសំណល់ 5 មាននៅលើកទី១ នឹងមានមកលើកទី២ ទៀតជាដើម។ ដូច្នេះបើសំណល់នៅដដែល នោះលទ្ធផលផ្នែកដេស៊ីមាលក៏វានឹងត្រឡប់មកដូចដើមវិញដែរ គឺថា វាមានខួបដោយមួយខួបប្រវែង ៦ លេខដេស៊ីមាល ។ បើយើងធ្វើលេខចែកនោះ យើងនឹងបាន ៖

$x = \frac{96}{7} = 13{,}714285\ 714285\ 714285 \ldots\ldots\ldots$ ។ តែលំហាត់ខាងលើនេះ គេ មិនធ្វើលេខចែក ដេស៊ីមាលទេ ដោយគេ ទុកផ្នែកដេស៊ីមាល ជាប្រភាគទៅវិញ ៕

<u>លំហាត់ទី៣</u>

គេទុកការកត់ត្រា នៃលំហាត់ទី២ តែគេសន្មតថា x ជាចំនួន អសនិទាន (*nombre irrationnel*) ។ នៅពេលនោះគេអាចកំណត់ នូវស្វ៊ីត (x_n) មិនមានទីបញ្ចប់ ដោយល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x_0 = x$ ហើយនិង $x_{n+1} = f(x_n)$ ហើយគេតាង $y_n = [x_n]$ និង $z_n = (y_0, y_1, \ldots\ldots\ldots, y_n)$ [មើលលំហាត់ពីមុន] ។ ប្រភាគ z_n ហៅថា បង្រួញលំដាប់ n (*la fraction* z_n *appelé réduite d'ordre* n) ។

ចូររក z_2 និង z_3 ក្នុងករណី ដូចតទៅនេះ ៖

$x = \pi$; $x = \sqrt{2}$; $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x = e = 2{,}71828\ldots\ldots$

ក្នុងករណីនីមួយៗ ឲ្យគោលទល់លើ នៃកំហុសដោយយក z_1 ឬ z_2 មកជំនួស x ។

ចំពោះ $x = \pi$ គេនឹងឃើញ $z_1 = \frac{22}{7}$ និង $z_2 = \frac{355}{113}$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

1-លំហាត់នេះ បន្តពីលំហាត់មុន ខុសគ្នាត្រង់ xជាចំនួន អសនិទាន (មិនមែនជាប្រភាគ)។ ដោយចំនួននេះ មានផ្នែក ដេស៊ីមាលរហូតដល់អនន្ត ហេតុនេះបានជាគេតាង $z_n = (y_0, y_1, \dots\dots, y_n)$ ជាប្រភាគកាត់យកតែត្រឹម y_n ។ ដូច្នេះ ចំនួនអសនិទានបង្រួញនេះ ទៅជាប្រភាគ ដូចលំហាត់មុនដែរ បានន័យថាយើងអាចប្រើ រូបមន្តនៃលំហាត់នោះ។ ចំពោះ π យើងកាត់យកត្រឹម 3,1416 ។ ដូច្នេះ យើងបាន $x = 3{,}1416$ ដែលយើងសរសេរជា ៖

$x = 3 + 0{,}1416 = 3 + 1416.\,10^{-4} = 3 + \frac{1416}{10^4}$ ។ បើយើងតាង $x = \frac{a}{b}$ ដូចលំហាត់ពីមុននោះ យើងបាន ៖

$a = bq + r_1\ (r_1 < b) \Rightarrow x = \frac{a}{b} = q + \frac{r_1}{b} \Rightarrow x = 3 + \frac{1416}{10000}$ ($r_1 = 1416$ និង $b = 10000$) ។

ដោយគណនា $\frac{b}{r_1}$ យើងបាន ជាបន្ទាប់បន្តដូចខាងក្រោមនេះ៖

$\frac{b}{r_1} = \frac{10000}{1416} = b = r_1q_1 + r_2\ \ (r_2 < r_1) \Rightarrow \frac{b}{r_1} = 7 + \frac{88}{1416}$ គឺថា $q_1 = y_1 = 7\ \ (1)$

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1416}{88} \Rightarrow r_1 = r_2q_2 + r_3\ \ (r_3 < r_2) \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = 16 + \frac{8}{88}$ គឺថា $q_2 = y_2 = 16\ (2)$ ។

$\frac{r_2}{r_3} = \frac{88}{8} \Rightarrow r_2 = r_3q_3 + r_4\ \ (r_4 < r_3) \Rightarrow \frac{r_2}{r_3} = 11 + 0$ គឺថា $q_3 = y_3 = 11\ [r_4 = 0]\ (3)$ ។

ដូច្នេះ $x = 3 + \frac{1416}{10000} = 3 + \frac{1}{\frac{10000}{1416}}$

$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{88}{1416}}$ [ដោយ (1)]

$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{1416}{88}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16 + \frac{8}{88}}}$ [ដោយ (2)]

$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16 + \frac{1}{\frac{88}{8}}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16 + \frac{1}{11}}}$ [ដោយ (3)]

បើជំនួស y_i ដោយចំនួន យើងបាន ដោយ [F4] ៖

$x = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16 + \frac{1}{11}}} \Rightarrow z_3 = (y_0, y_1, y_2, y_3) = (3, 7, 16, 11)$ ។

ចំពោះ $z_2 = (y_0, y_1, y_2)$ ដោយ $r_3 \neq 0$ នោះបើយើងយក $y_2 = 16$ នោះ

យើងមាន កំហុស $\frac{r_3}{r_2} = \frac{8}{88}$ គឺថា $16 \leq y_2 \leq 16 + \frac{8}{88}$

ដូច្នេះ $z_2 = (y_0, y_1, y_2) = (3, 7, 16)$ ដោយមានកំហុសទាល់លើស្មើនឹង $\frac{8}{88}$ ។

សង្កេត

a) ដែលថា កំហុស (*erreur*) គឺកំហុសបើយើងធៀបទៅនឹង ចំនួនដើមដំបូងគឺ $x = 3{,}1416$ ។ ឥឡូវយើងគណនា $z_3 = (y_0, y_1, y_2, y_3) = (3, 7, 16, 11)$ គឺ

$$z_3 = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{16+\frac{1}{11}}} = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{\frac{(16\times 11)+1}{11}}} = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{\frac{177}{11}}} = 3 + \frac{1}{7+\frac{11}{177}} = 3 + \frac{177}{1250}$$

$$= 3 + \frac{177\times 8}{1250\times 8} = 3 + \frac{1416}{10000} = 3{,}1416$$ ។ ដូច្នេះ z_3 ឥតមាន កំហុសទេ ។

b) $z_2 = (y_0, y_1, y_2) = (3, 7, 16) = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{\frac{(7\times 16)+1}{16}} = 3 + \frac{16}{113}$

$= 3 + 0{,}14150 = 3{,}1415$ ។ដូច្នេះមានកំហុស $3{,}1416 - 3{,}1415 = 0{,}0001$

គឺកំហុសលើលេខចុងក្រោយ $\frac{8}{88} = \frac{1}{11} < \frac{1}{10}$ ។

2- បង្ហាញ $z_1 = \frac{22}{7}$ និង $z_2 = \frac{355}{113}$

ដោយ $z_1 = (y_0, y_1) = y_0 + \frac{1}{y_1} = 3 + \frac{1}{7}$ (ដោយកំហុសលើ y_1 ស្មើនឹង $\frac{88}{1416}$)

$$= \frac{\mathbf{21+1}}{\mathbf{7}} = \frac{\mathbf{22}}{\mathbf{7}} = 3{,}1428$$ ។ កំហុស ស្មើនឹង $3{,}1428 - 3{,}1416 = 0{,}0012$

$z_2 = (y_0, y_1, y_2) = y_0 + \frac{1}{y_1+\frac{1}{y_2}} = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{16}}$ ដោយកំហុសលើ y_2 ស្មើនឹង $\frac{8}{88}$

$$= 3 + \frac{\mathbf{1}}{\frac{\mathbf{(7\times 16)+1}}{\mathbf{16}}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{3(113)+16}{113} = \frac{355}{113}$$ ។

(ចំពោះ ចំនួន x ឯទៀតៗ របៀបរកចម្លើយប្រហែលគ្នាទេ) ។

លំហាត់ទី៤

គេតាងដោយ f ការអនុវត្តន៍មួយពី ចន្លោះបើក $]a,b[$ នៃ R ទៅក្នុងសំនុំ F មួយ ។ ហើយគេសន្មតថា ចំណុចណាមួយក៏ដោយនៃ $]a,b[$ គឺក៏ជា ចំណុចកណ្តាលនៃចន្លោះមួយដែលមានប្រវែង មិនសូន្យ ហើយនៅក្នុងចន្លោះនោះ f មិនប្រែប្រួល (គឺថាមិនឡើងមិនចុះ) ។

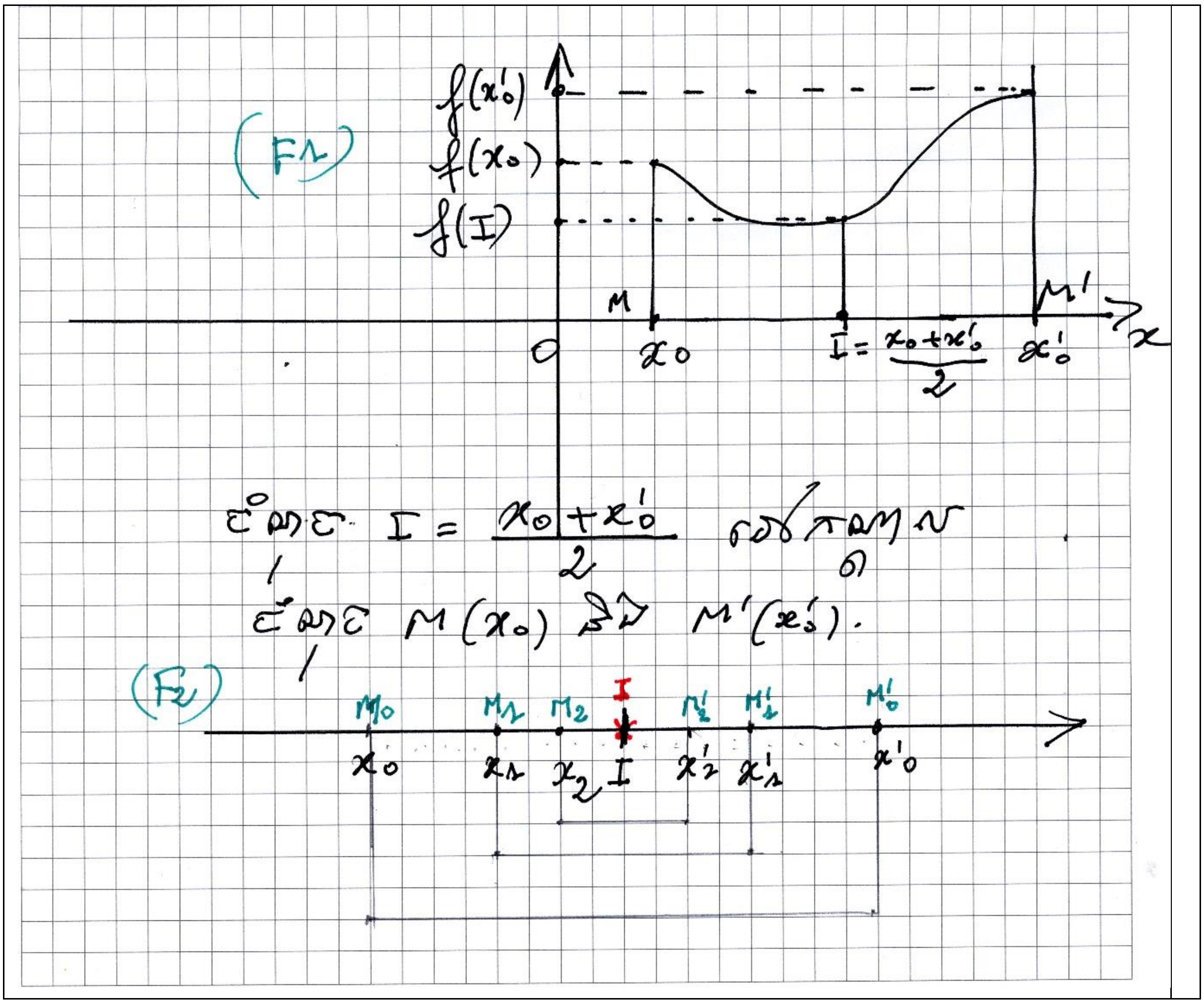
ចូរបង្ហាញ ថា f មិនប្រែប្រួល នៅលើ $]a,b[$ ។

<u>បង្ហាញ</u>

ឧបមាថា f ប្រែប្រួល លើ $]a,b[$ គឺថាមាន ចំណុចពីរ x_0 និង x'_0 នៃ $]a,b[$ ដែល $f(x_0) \neq f(x'_0)$ ហើយដោយការឧបមានេះ យើងនឹងទៅដល់ស្ថានការណ៍ដែលផ្ទុយពី សម្មតិកម្ម ដែលថា f មិនប្រែប្រួលនៅក្នុងចន្លោះណាមួយដែលមានចំណុចកណ្តាល ហើយ មានប្រវែងមិនសូន្យ ។

ដើម្បីប្រើ សម្មតិកម្មថា កាលណា x ជាផ្ចិត នៃ ចន្លោះ ណាមួយនោះ f មិនប្រែប្រួល ។ ដូច្នេះ ដោយ x_0 និង x'_0 ជាចំណុចពីរខុសគ្នា យើងយក ចំណុច x ជាចំណុចនៅចន្លោះ x_0 និង x'_0 ហើយជាចំណុច នៅកណ្តាល គឺ ថា $x = \frac{x_0+x'_0}{2}$ ។ ដោយ x_0 និង x'_0 នៅក្នុងចន្លោះ $]a,b[$ ដូច្នេះ x ដែល $x_0 \leq x \leq x'_0$ ក៏នៅក្នុង ចន្លោះ $]a,b[$ ដែរ ។

បន្ទាប់មក បើ M_0 ជាចំណុច មានអាប់ស៊ីស x_0 ហើយ M'_0 ជាចំណុច មានអាប់ស៊ីស x'_0 នោះយើងតាងដោយ I ចំណុចនៅកណ្តាលអង្កត់ $M_0M'_0$ ហើយមានអាប់ស៊ីស x (មើលរូបខាង ក្រោម) ។ ដោយសម្មតិកម្ម $f(x_0) \neq f(x'_0)$ នោះយើងអាចថា $f(x_0) \neq f(\frac{x_0+x'_0}{2})$ ។



បន្ទាប់មកយើងកំណត់ ស្វីតពីរ (x_n)និង (x'_n) ដែលមានចំណុច M_n និង M'_n ផ្លូជាមួយ
នឹង រត់ទៅជិតចំណុច I កាលណា n កាន់តែធំ ពោល គឺយើង កំណត់ វិឡាស្បុង
រគោរ៉ងដូចតទៅនេះ ៖

$x'_1 - x_1 = \frac{1}{2}(x'_0 - x_0)$ ហើយ $f(x'_1) \neq f(x_1)$

ហើយជាទូទៅ ៖

$x'_n - x_n = \frac{1}{2}(x'_{n-1} - x_{n-1})$ ហើយ $f(x'_n) \neq f(x_n)$

ដោយ កាលណា n កើន នោះចំណុច M_n ខិតទៅជិត ចំណុច I ដូច្នេះ ស្វីត (x_n)

ជាស៊ីត កើន ហើយជាមួយគ្នានោះ ដោយចំណុច M'_n ក៏ខិតទៅជិត ចំណុច I ដែរ នោះ ស៊ីត (x'_n) ជាស៊ីត ចុះ គឺថា $x'_n \geq x'_{n+1}$ ។ រួមសេចក្តីទៅយើងបាន៖

$x_0 \leq x_1 \leq x'_1 \leq x'_0$ និង $x'_1 - x_1 = \frac{1}{2}(x'_0 - x_0)$ ហើយ $f(x'_1) \neq f(x_1)$

…………………

(1) $x_n \leq x_{n+1} \leq x'_{n+1} \leq x'_n$ និង $x'_1 - x_1 = \frac{1}{2^n}(x'_0 - x_0)$ ហើយ $f(x'_n) \neq f(x_n)$ ចំពោះគ្រប់ ចំនួន n ។

ដូច្នេះ ស៊ីតនេះ បំពេញ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ នៃស្វ័យស័ត្យកង់តរ (*aux coditionsd de Cantor* មើល § $VI, 9$) ដូច្នេះមានចំនួន x មួយ ដែលបំពេញ

$x_n \leq x \leq x'_n$ គ្រប់ចំនួន n ។ ដោយ x ជាចំណុចកណ្តាលនៃចន្លោះដែលនៅក្នុង នោះ f <u>មិន ប្រែប្រួល</u> (តាមនិយមន័យ នៃ f) ដូច្នេះ កាលណា n កាន់តែធំទៅនោះ x_n និង x'_n នឹងចូលក្នុង ចន្លោះនោះ ជាមិនខាន ដូច្នេះ $f(x) = f(x_n) = f(x'_n)$ ដែលផ្ទុយនឹង (1) ៕

<u>លំហាត់ទី៥</u>

គេតាងដោយ G គ្រុបអាបេលីអៀង មានលំដាប់មួយ កត់ត្រាដោយ លេខបូក (+) (មើលនិយមន័យ § $VI, 9$) ហើយ G^+ សំនុំនៃធាតុ x នៃ G ដែលបំពេញ $x \geq 0$ (ធាតុវិជ្ជមាន) ។

a) បង្ហាញថា វីឡាស្សុង $a \geq b \Leftrightarrow a - b \in G^+$

b) បង្ហាញថា G^+ ជាកន្ទះគ្រុប អាបេលីអៀង មានលំដាប់ បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ ពី $1°$ ទៅ $4°$ ដែលថ្លែងនៅដើម កថាខ័ណ្ឌ $VI, 1$។

<u>ចម្លើយ</u>

<u>រំលឹក</u> កន្ទះគ្រុបគឺ បានឡើងដោយ សំនុំមួយមាន ច្បាប់ក្នុង ផ្ទុំ ។ កន្ទះគ្រុបអាបេលីអៀង

កាលណាច្បាប់ក្នុងនោះ ត្រលប់។ នៅក្នុង កន្ទះគ្រុបមាន ធាតុ នប៉ុសកលីធ្គ e គេថាធាតុ ពីរ x និង y ធ្ទុះគ្នា កាលណា វាបំពេញ $x * y = y * x = e$ (មើល $II, §8, a$) ។

a) បង្ហាញថា វីឡាស្សុង $a \geq b <=> a - b \in G^+$

តាមនិយមន័យ គ្រុបអាបេលីអៀងអាបេលីអៀង មានលំដាប់ គេមាន៖

$a \geq b => a + c \geq b + c$ (មើល $VI, 9$) (1)

ដោយ $b \in G$ ដូច្នេះ $-b \in G$ (ពីព្រោះ G ជាគ្រុប) ដូច្នេះដោយ ជំនួស c ដោយ $-b$ ក្នុង (1) យើងបាន ៖ $a \geq b => a - b \geq b - b = 0$ ។ ដូច្នេះ $a \geq b => a - b \geq 0$ ឬ $a - b \in G^+$ ។ ផ្ទុយទៅវិញ $a - b \in G^+ => a - b \geq 0$ ដោយ (1)

$a - b \geq 0 => (a - b) + b \geq 0 + b => (a + (-b + b) \geq b$ ឬ $a \geq b$ ។

b) បង្ហាញថា G^+ ជាកន្ទះគ្រុប អាបេលីអៀង មានលំដាប់ បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ ពី $1°$ ទៅ $4°$ ដែលថ្លែងនៅដើម កថាខ័ណ្ឌ $VI, 1$៖

G^+ ជាកន្ទះគ្រុប អាបេលីអៀង មានលំដាប់ ពីព្រោះ វិធីបូក នៅក្នុង G ក៏ជា វិធីបូក នៅក្នុង G^+ដែរ។ ហើយដោយ $G^+ = \{ x \in G \ / \ x \geq 0 \}$ ដូច្នេះ $0 \in G^+$។ ដូច្នេះ G^+ បាន ល័ក្ខខ័ណ្ឌទី១ និងទី២ ។

<u>ល័ក្ខខ័ណ្ឌទី៣ ៖</u> $a \geq b => \exists c$ ដែលឲ្យ $a = b + c$

$a \geq b => a - b \in G^+$ ដែលយើងតាងដោយ c ជាតុនៃ G^+នោះ គឺថា $a - b = c$ ។

ដោយប្រើ (1) ចំពោះ សញ្ញា $=$ នោះយើងបាន៖

$a - b = c => (a - b) + b = c + b => a + (-b + b) = b + c => a = b + c$ ។

<u>ល័ក្ខខ័ណ្ឌទី៤</u> ៖ $a + b = a + c => b = c$

ដោយប្រើ (1) ចំពោះ សញ្ញា $=$ នោះយើងបាន៖

$a + b = a + c => (a + b) + (-a) = (a + c) + (-a)$ ឬ

$(-a)+(a+b)=\ \ (-a)+(a=c)$ (លក្ខណៈ ត្រលប់នៃ +)

$(-a+a)+b=\ \ (-a+a)+c$ (លក្ខណៈ ផ្ដុំ នៃ +) => $b\ =\ c$ ។

<u>សង្កេត</u>

ឧទាហរណ៍ នៃកន្ទះគ្រុប មានដូចជា ចំនួនគត់ $N=\{0,1,2,\ \ ,n,\ \ldots\ldots\}$ ដែលមានលេខបូក ហើយសូន្យជាធាតុ នប៉ុសកលិន្ត។ នៅក្នុងកន្ទះ គ្រុប G^{+} ជាតុនីមួយៗ ឥតមានជាតុធ្ទុះ (ចំពោះលេខបូក គឺជាតុផ្ទុយ) នៅក្នុងសំនុំនោះទេ (ពីព្រោះជាតុផ្ទុយនៃ n គឺ $-n$)។ ដើម្បី មានជាតុធ្ទុះ គេពង្រីកសំនុំនោះ ឲ្យទៅ ជាសំនុំ G មួយធំ ដែលនៅក្នុងនោះ ក៏មានជាតុរបស់ G^{+} ទាំងអស់ដែរ ហើយជាតុនីមួយៗ សុទ្ធតែមាន មានផ្ទុយជានិច្ច ។

ដូច្នេះ នេះជាលំហាត់ មួយតួចះ

<u>**លំហាត់ទី៥ (ត)**</u>

យើងតាងដោយ G គ្រុបមួយដែលបានដោយពិធី ធ្ទុះនៃកន្ទះគ្រុបអាបេលីអៀង D ។ ចូរបង្ហាញថា គេអាចកំណត់ លើ G នូវ លំដាប់ទាំងស្រុងមួយ ដែលធ្វើឲ្យ G ទៅជាគ្រុប អាបេលីអៀង មានលំដាប់ទាំងស្រុង ហើយ គេស្គាល់ D ដោយ សំនុំនៃជាតុវិជ្ជមាននៃ G ។

<u>ចម្លើយ</u>

របៀបធ្ទុះ ដើម្បីឲ្យបានគ្រុប G អំពី កន្ទះគ្រុបអាបេលីអៀង D នោះយើងបានឃើញនៅមេរៀន §$V,3$ ហើយ ។ គេធ្ទុះគឺដើម្បីឲ្យជាតុនីមួយៗនៃ D មានជាតុផ្ទុយ ហើយនៅពេលនោះទើមគេបានជាគ្រុប ពីព្រោះ D គ្រាន់តែជាកន្ទះគ្រុបតែប៉ុណ្ណោះ ហើយនៅក្នុង D គ្មានជាតុផ្ទុយទេ ។ ដែលថ្មីចំពោះលំហាត់នេះ គឺ លំដាប់ទាំងស្រុងនៃគ្រុប G ពីព្រោះលំដាប់ទាំងស្រុងមានតែនៅក្នុង កន្ទះគ្រុប D តែប៉ុណ្ណោះ។ ដើម្បីមាន លំដាប់ទាំងស្រុងនៅក្នុង G នោះគេកំណត់ រីឡាស្យុង ៖

(1) $x\ \geq y$ បើ $x-y\in D\ \ (x\in G,\ y\in G)$ ។

យើងត្រូវបង្ហាញថា (1)ជា ទំនាក់ទំនងលំដាប់ទាំងស្រុងក្នុង G គឺ រ៉េផ្លិចស៊ីវ ប្រឆាំងធៀប និង ត្រង់ស៊ីទីវ ។

1/ $x \geq x$ បើ $x - x \in D$ ត្រូវ ពីព្រោះ $x - x = 0$ ហើយ $0 \in D$

2/ $x \geq y$ និង $y \geq x$ តើ $x = y$?

$x \geq y \Rightarrow x - y \in D$ (2)

$y \geq x \Rightarrow y - x \in D$ ឬ $-(x - y) \in D$ (3)

ដោយ $(x - y)$ និង $-(x - y)$ ជាធាតុ ពីរផ្ទុយនឹងគ្នា ដូច្នេះ ក្រៅពីសូន្យ ធាតុទាំងពីរមិនអាចនៅក្នុង D ទេ ។ ដោយមកពី D គ្មានធាតុផ្ទុយនេះហើយ បានជាគេធ្វើ ការពង្រីកនៃ D ។ ដូច្នេះ (2) និង (3) $\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$ ។

3/ $x \geq y$ និង $y \geq z$ តើ $x \geq z$?

$$\left.\begin{array}{l} x \geq y \Rightarrow x - y \geq 0 \\ y \geq z \Rightarrow y - z \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x - z \geq 0 \Rightarrow x \geq z$$ [ដោយបូក $(x - y) + (y - z)$] ។

ដោយការពង្រីក ចាប់ពី សំនុំ N បានដូចតទៅនេះ៖

ពីសំនុំ N នៃចំនួនគត់ បន្ទាប់ពីពង្រីកទៅ គេបាន សំនុំ Z នៃចំនួនគត់រ៉ឡាទីប ដែលជាគ្រុប អាបេលីអៀង ៖ ចំនួន $x \in N$ មានចំនួនផ្ទុយ $-x \in Z$ ហើយចំនួន $-x$ មានចំនួនផ្ទុយ x ពីព្រោះ $x + (-x) = 0$ (0 ជាធាតុ នប៉ុសកលិង្គ ចំពោះលេខ បូក) ។

លំហាត់ទី៦

ជាទូទៅ គេហៅថា កន្ទះគ្រុប អាបេលីអៀង មានលំដាប់ គឺជា កន្ទះគ្រុបអាបេលីអៀង D ដែលមាន ទំនាក់ទំនងលំដាប់ទាំងស្រុង ដែល $a \geq b \Rightarrow a * c \geq b * c$ ។ ដោយប្រើការកត់ត្រានៃ §$V,3$ គេតាងដោយ D^* សំនុំនៃធាតុស្មើជ្រុងនៃ D ហើយដោយ Δ ដើងលព្ធ (le quotient) នៃ $D * D^*$ ចែកដោយ ទំនាក់ទំនងសមមូល ៖

$$(a,b) \equiv (a',b') \quad \text{បើ} \quad a*b' = b*a' \quad (1)$$

គឺថា $\Delta = \frac{D*D^*}{R}$ (ដោយ R ជា ទំនាក់ទំនងសមមូល) ។

$a)$ បង្ហាញថា ទំនាក់ទំនង $a*d \geq b*c$, $(a',b') \equiv (a,b)$ និង $(c',d') \equiv (c,d)$ => $a'*d' \geq b'*c'$

ដោយទាញយកពីនេះ បង្ហាញថា គេបាន ទំនាក់ទំនងលំដាប់ នៅលើ Δ ដោយ ដាក់

$((a,b)) \geq ((c,d))$ បើ $a*d \geq b*c$

$b)$ បង្ហាញថា ទំនាក់ទំនងដែលបានកំណត់លើ Δ នេះ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់ទាំងស្រុង ($relation\ d'ordre\ total$) ។ ដោយ តាងដោយ A,B,C ជាធាតុនៃ Δ បង្ហាញថា វិសមភាព $A \geq B$ => $A*C \geq B*C$ ។ ដូច្នេះ Δ ក៏ជា កន្ទះគ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់មួយដែរ ។

$c)$ បង្ហាញថា កន្ទះគ្រុបបូក នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ កន្ទះគ្រុបគុណ នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង កន្ទះគ្រុបបូក នៃចំនួន សនិទាន វិជ្ជមាន គឺជា កន្ទះគ្រុបអាបេលីអៀង មានលំដាប់ កាលណាគេឲ្យវានូវ លំដាប់ធម្មតា ($on\ les\ munit\ de\ l'ordre\ naturel$) ដែលយើងធ្លាប់ប្រើរាល់ថ្ងៃ ។ បើគេតាងដោយ Q^+ សំនុំនៃចំនួន សនិទានវិជ្ជមាន នោះគេបានរបៀបជាទូទៅមួយ សម្រាប់ពង្រីកទៅដល់ Z និងទៅដល់ Q^+ នូវលំដាប់ធម្មតាដែលមាននៅលើ N ហើយក៏អាច ពង្រីកតទៅទៀតទៅដល់ Q នូវលំដាប់ធម្មតានោះដែលបានលើ Q^+ ៕

<u>ចម្លើយ</u>

$a)$

- បង្ហាញថា ទំនាក់ទំនង $a*d \geq b*c$, $(a',b') \equiv (a,b)$ និង $(c',d') \equiv (c,d)$ => $a'*d' \geq b'*c'$ ។

$(a',b') \equiv (a,b)$ => $a'*b = b'*a$ (1)

$(c',d') \equiv (c,d)$ => $c'*d = d'*c$ ឬ $d'*c = c'*d$ (2) ។

ដោយគណនា (1)$*$(2) យើងបាន៖

$(a' * b) * (d' * c) = (b' * a) * (c' * d)$ ឬដោយប្រើ លក្ខណៈ ផ្តុំ និងត្រលប់នៃ $(*)$

យើងអាចសរសេរ៖ $(a' * d') * (b * c) = (b' * c') * (a * d)$ (3)

ដោយ $(a * d) \geq (b * c)$ នោះដោយ (3) យើងបាន

$(a * d) * (b' * c') = (b * c) * (a' * d') \Rightarrow (b' * c') \leq (a' * d')$ ។

- ដោយទាញយកពីនេះ បង្ហាញថា គេបាន រីឡាស្យុងលំដាប់ នៅលើ Δ ដោយដាក់ $((a,b)) \geq ((c,d))$ បើ $a * d \geq b * c$ ។

យើងសង្កេតនូវ លទ្ធផលនេះ យើងឃើញថា៖

$(a,b) \equiv (a',b')$
$(c,d) \equiv (c',d')$

ហើយម្យ៉ាងទៀត

$a * d \geq b * c$ ជា រីឡាស្យុងរវាង (a,b) និង (c,d) ដែលជាធាតុពីរផ្សេងគ្នានៃ $D * D^*$

$a' * d' \geq b' * c'$ ជា រីឡាស្យុង រវាង (a',b') និង (c',d')ដែលជាធាតុពីរទៀតនៃ $D * D^*$

តែធាតុពីរចុងក្រោយនេះ មានទំនាក់ទំនង នឹងធាតុពីរ ពីមុន គឺ (a,b) សមមូលនឹង (a',b') ហើយ (c,d) សមមូលនឹង (c',d') ហើយដោយសមមូលនេះ ដោយការបង្ហាញរួចមកហើយ យើងឃើញថា កម្មសិទ្ធិ នៃរីឡាស្យុង $a * d \geq b * c$ មិនផ្លាស់ប្តូរទេ បើធាតុនៃ $D * D^*$ សមមូលនឹងគ្នា ។ ដូច្នេះយើងអាចពង្រីក កម្មសិទ្ធិនេះ មកដល់ **ថ្នាក់** នៃ សមមូលបាន គឺថា យើងអាចសន្មត រីឡាស្យុង លំដាប់ទាំងស្រុង មកលើ សំនុំដើងលព្ធ $\Delta = \frac{D * D^*}{R}$ បានដោយតាំងថា ៖ $((a,b)) \geq ((c,d))$ បើ $a * d \geq b * c$ ។

$b)$ បង្ហាញថា រីឡាស្យុងដែលបានកំណត់លើ Δ នេះ ជារីឡាស្យុងលំដាប់ទាំងស្រុង (*relation d'ordre total*) ។ ដោយ តាងដោយ A, B, C ជាធាតុនៃ Δ បង្ហាញថា វិសមភាព

$A \geq B \;=>\; A*C \geq B*C$។

ដើម្បី បង្ហាញថា ទំនាក់ទំនង លើ Δ កំណត់ដោយ

$((a,b)) \geq ((c,d))$ បើ $a*d \geq b*c$ ជា ទំនាក់ទំនងកំណត់ទាំងស្រុង យើងគ្រាន់តែ

បង្ហាញថា $A \geq B \;=>\; A*C \geq B*C$ (មើល $VI,9$)។

យើងតាងដោយ $A = ((a,b))$, $B = ((c,d))$, $C = ((\alpha,\beta))$ ដោយ $(a,b),(c,d),(\alpha,\beta)$

ជាគូនៃ $D*D^*$ ។ ដោយជាតុក្នុង D^* គឺជាធាតុស្មើជ្រុងនៃ D ដូច្នេះធាតុនៃ D^* ក៏ជាធាតុ

នៃ D ដែរ។ ដោយ D ជាកន្ទុះគ្រុបអាបេលីអៀង មានលំដាប់ទាំងស្រុង ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនង

លំដាប់ រវាងធាតុទាំងឡាយនៃ D ក៏បំពេញ ដូចជា ៖ $a \geq b \;=>\; a*\alpha \geq b*\propto$ ជាដើម ។

បន្ទាប់ពីការសង្កេតនេះ យើងត្រឡប់មក ការបង្ហាញយើងវិញ ៖

$A \geq B \;=>\; ((a,b)) \geq ((c,d)) <=> \; a*d \geq b*c$ (1)

$A*C \geq B*C \;=>\; ((a,b))*((\alpha,\beta)) \geq ((c,d))*((\alpha,\beta)) <=>$

$((a*\alpha, b*\beta)) \geq ((c*\alpha, d*\beta)) \;<=>\; (a*\alpha)*(d*\beta) \geq (b*\beta)*(c*\alpha)$ (2)

យើងត្រូវបង្ហាញ (2) ដោយប្រើ (1) ។ ដោយ $*$ ជាច្បាប់ក្នុងនៃ D កន្ទុះគ្រុបអាបេលីអៀង

យើងអាចសរសេរ (2) ជា ៖

$(a*d)*(\alpha*\beta) \geq (b*c)*(\alpha*\beta)$ (3)

ដោយ $*$ ជាច្បាប់ក្នុងនៃ Dដូច្នេះធាតុនីមួយៗនៃ (3) ដូចជា $(a*d)$ ឬ $(\alpha*\beta)$ជាដើមនោះ

សុទ្ធតែជាធាតុនៃ D ដែលមានលំដាប់ទាំងស្រុង។ ដូច្នេះ (3) ត្រូវ ដោយសំអាងលើ (1)។

$c)$ ចម្លើយនៃសំណួរនេះ គឺការអនុវត្តន៍ នៃមេរៀន $\S V,4$ ក្នុងការពង្រីក។

ជាទូទៅក្នុងការពង្រីក គេចាប់ផ្តើម ពី កន្ទុះគ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ទាំងស្រុង។

នៅក្នុងលំហាត់នេះ កន្ទុះគ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ទាំងស្រុងនោះគឺ សំនុំ N នៃ

ចំនួនគត់ដោយ មាន ច្បាប់ក្នុងលេខ បូក ហើយមានសូន្យ ជា ធាតុ នប៉ុសកលិដ្ឋ ហើយ

មានលំដាប់ទាំងស្រុង គឺលំដាប់ធម្មតា ដែលយើងប្រើរាល់ថ្ងៃ គឺ សញ្ញា $\geq$ ។ ហើយដោយប្រើរបៀបនេះ តៗមក គេក៏បានពង្រីករហូតដល់ សំនុំ សនិទាន Q ៕

លំហាត់ទី៧

[និយមន័យ នៃអនុបាត (rapport) រវាង ទំហំពីរ នៅក្នុងក្រុមតែមួយដែលអាចវាស់បាន

Définition du rapport de deux grandeurs mesurables du même espèce]

គេតាងដោយ G គ្រុបអាបេលីអៀង មានលំដាប់ ហើយបំពេញ នូវស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ។

a) បង្ហាញថា ចំពោះធាតុ $a > 0$ និង $a \in G$ គេអាចផ្គូផ្គងនឹង ការអេនុវត្តន៍ ឡើងជានិច្ច f_a ពី G ទៅ R តែមួយគត់ ដែលបំពេញ ៖

$f_a(a) = 1$ និង $f_a(x + y) = f_a(x) + f_a(y)$ [មើល ផ្នែកទី១ នៃការស្នើ $VI, 10,1$ ។

2) ដោយប្រើលទ្ធផលថា f_a មានតែមួយគត់ ចូរបង្ហាញវិឡាស្យុង ៖

$f_a(x) = \frac{f_u(x)}{f_u(a)} = \frac{1}{f_x(a)}$ ។

ការប្រតិបត្តិទាញចេញពីលំហាត់នេះ

G ជាសំនុំនៃទំហំ ដែលអាចវាស់បាន (*grandeurs mesurables*) មានទិសដៅ (*orientées*) នៅក្រុមតែមួយ (*d'une même espèce*)។ តាមនិយមន័យ គេថា ចំនួន $f_a(x)$ ជា រង្វាស់ (*la mesure*) នៃទំហំ x កាលណាគេយក ទំហំ a (*grandeur a*) ជាខ្នាតឯកតា (*lorsqu'on prend la grandeur a pour unité*) ។

លទ្ធផលនៃលំហាត់នេះ ថ្លែងថា ៖ រង្វាស់នោះ ស្មើនឹង អនុបាត (*rapport*) នៃ រង្វាស់ x ចែកដោយ រង្វាស់ a ដោយប្រើខ្នាតឯកតា u ណាក៏ដោយ ។

អនុបាត $\frac{f_u(b)}{f_u(a)}$ (ដែល មិនជាប់ទាក់ទងនឹង u) ហៅថា អនុបាតនៃ ទំហំ b ទៅនឹងទំហំ a *est appelé rapport de la grandeur b à la grandeur a*) ហើយគេតាងដោយ b/a [58]។

[58] បានន័យថា ចំពោះ អនុបាត គេមិនចាំបាច់បញ្ជាក់ ខ្នាតឯកតាទេ ដូចជា $A = \frac{2}{5}$ នោះបើ ឯកតា ជា

__ចម្លើយ__

ដើម្បីរកអនុគមន៍ f_a ហើយដោយលំហាត់នេះទាក់ទងនឹងរង្វាស់ នោះធ្វើឲ្យយើងកំណត់អនុគមន៍ f_a ដូចជា $f_a(x) = \frac{x}{a}$ (ពីព្រោះថា x ទុកដូចជាទំហំ $a > 0$ ជាខ្នាតឯកតា ហើយ $f_a(x)$ ដែលនៅក្នុង R ជារង្វាស់) ។ តើ $\boldsymbol{f_a(x) = \frac{x}{a}}$ ដែលយើងកំណត់នេះ បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $f_a(a) = 1$ និង $f_a(x+y) = f_a(x) + f_a(y)$ (1) នេះទេ?

$f_a(a) = \frac{a}{a} = 1$

$f_a(x+y) = \frac{x+y}{a} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = f_a(x) + f_a(y)$។ ដូច្នេះ f_a បំពេញ (1)

បង្ហាញថា f_a ឡើងជានិច្ច ៖ $x > y \Rightarrow f_a(x) > f_a(y)$

$f_a(x) = \frac{x}{a}$ ហើយ $f_a(y) = \frac{y}{a}$ ។ ដោយ $a > 0$ ដូច្នេះ $x > y \Rightarrow \frac{x}{a} > \frac{y}{a}$ ឬ

$x > y \Rightarrow f_a(x) > f_a(y)$។ ដូច្នេះ f_a កើនជានិច្ច ។

បង្ហាញថា f_a មានតែមួយគត់ ៖

ដោយ $f_a(x) = \frac{x}{a}$ នោះ $f_a(0) = \frac{0}{a} = 0$ ។ ដូច្នេះយើងឃើញថា អនុគមន៍ f_a បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ ទាំងអស់ នៃ ការស្នើ $VI, 10, 1$។ ហើយដោយការស្នើនេះ អនុគមន៍ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌបែបខាងលើនេះ មានតែមួយប៉ុណ្ណោះ ។

2) ដោយប្រើលទ្ធផលថា f_a មានតែមួយគត់ ចូរបង្ហាញវិឡាស្សុង ៖

$f_a(x) = \frac{f_u(x)}{f_u(a)} = \frac{1}{f_x(a)}$ ។

$f_a(x) = \frac{x}{a}$

$\frac{f_u(x)}{f_u(a)} = \frac{x}{u} \;/\; \frac{a}{u} = \frac{x}{u} \times \frac{u}{a} = \frac{x}{a}$

ដូច្នេះ

$f_a(x) = \frac{f_u(x)}{f_u(a)}$

ម៉ែត្រ នោះ $A = \frac{2\,m}{5\,m} = \frac{2}{5}$ ហើយបើ ឯកតាជា cm នោះ $A = \frac{2\,cm}{5\,cm} = \frac{2}{5}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត

$f_a(x) = \frac{x}{a} = \frac{1}{\frac{a}{x}} = \frac{1}{f_x(a)}$ ។

លំហាត់ទី៨

គេតាងដោយ x ចំនួនពិតមួយ ហើយគេសន្មតថា មានស្វ៊ីត នៃចំនួនគត់ y_n ដែល បំពេញ $0 < |n!x - y_n| < 1$ (វិសមភាព ដោយ តឹងរឹង – *inégalité stricte*) $\forall n$ ។

ចូរបង្ហាញថា x មិនមែនជា ចំនួន សនិទាន (x *n'est pas rationnel*) ។

[បើសិនជា $x = \frac{p}{q}$ នោះ ផលគុណ $n!x$ នឹង ទៅជា ចំនួន គត់ កាលណា $n > q$ ហើយនៅពេលនោះ វិសមភាព ខាងលើ មិនបំពេញ] ។

ចម្លើយ

ដើម្បី បង្ហាញថា x មិនមែនជា ចំនួន សនិទាន នោះយើង បង្ហាញដោយរបៀប « មិនសមហេតុសមផល » (*démonstration par absurde*) គឺយើង ឧបមាថា x ជា ចំនួន សនិទាន គឺ $x = \frac{p}{q}$ $(p \in Z\,,\ q \in Z^*$ ដូច្នេះ យើង គណនា $n!x$ ៖

$$n!x = [1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times (n-1) \times n\,] \times \frac{p}{q}$$

ដោយ ស្វ៊ីត y_n កំណត់ ចំពោះចំនួន គត់ n ណាក៏ដោយ នោះ n អាចធំជាង q ក៏បាន ដែរ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ $n > q$ នោះបើយើងគណនា $n!x - y_n$ យើងបាន៖

$$n!x - y_n = \frac{1.2.3.\ \ .\ q\,.(q+1)\ldots n\ \times p}{q} - y_n = \frac{1.2.3.\ \ .\ q\,.(q+1)\ldots n\ \times p}{q} - y_n$$

ដោយ y_n ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ ដូច្នេះ យើងឃើញថា $n!x - y_n$ ជាចំនួនគត់ ។ ហើយ ដោយ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $0 < |n!x - y_n| < 1$ នោះយើងឃើញថា $n!x - y_n$ ជាចំនួនគត់ នេះ មិនបំពេញ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ នេះឡើយ ។ ពីព្រោះ ចំនួនគត់ A ដែលបំពេញ $0 < A < 1$ នោះគ្មានទេ ។ ដូច្នេះ x ជា ចំនួន សនិទាន មិនអាចបំពេញ វិសមភាព ខាង

លើនេះទេ ។ ដូច្នេះ x ជា ចំនួនពិត ។

លំហាត់ទី៩

បង្ហាញថា សំនុំ R នៃចំនួនពិត គឺ អាចរាប់ មិនបាន (*non dénombrable*) [គេអាច បង្ហាញ ដោយ មិនសមហេតុផល (*raisonnement par absurde* ដោយរៀប ជាតុទាំងឡាយនៃ R ឲ្យទៅជាស្វីត (x_n) ហើយបន្ទាប់មក គេសង់ចំនួពិត x មួយ ដោយយក ចំពោះ $n^{ème}$ ដេស៊ីមាលនៃ x គឺចំនួនមួយ ខុសពី ៩ និង ខុសពី $n^{ème}$ ដេស៊ីមាលនៃ x_n ។ ដូច្នេះ ចំនួន x ដែលបាន គឺ ផ្សេងពី x_n , $\forall n$] ។ ដោយហេតុនេះ គេហៅ ការឌីណាល់នៃ R ថា « *puissance du continu* » (ស្វ័យគុណនៃការជាប់) ។

ចម្លើយ

ឧបមា យើងយកស្វីត (x_n) មួយនៃចំនួនពិត ដូចជា ៖

$x_0 = b_0, a_0 a_1 \ldots\ldots a_p \ldots\ldots$ ដោយ b_0 ជាផ្នែកគត់នៃ x_0

$x_1 = b_1, a_0 a_1 \ldots\ldots a_p \ldots\ldots$ ដោយ b_1 ជាផ្នែកគត់នៃ x_1

$x_2 = b_2, a_0 a_1\, a_3 \ldots\ldots a_p \ldots\ldots$ ដោយ b_2 ជាផ្នែកគត់នៃ x_2

…………………………

$x_n = b_n, a_0 a_1 \ldots\ldots a_p \ldots a_n \ldots$ ដោយ b_n ជាផ្នែកគត់នៃ x_n

នោះ យើង យក

$x = \alpha, a'_0 a'_1 a'_2 \ldots\ldots a'_p \ldots. a'_n \ldots\ldots$

ដោយ α ជាផ្នែកគត់នៃ x ហើយចំពោះផ្នែក ដេស៊ីមាល នៃ x យើងយក ៖

$a'_0 \neq 9$ និង $\neq a_0$

$a'_1 \neq 9$ និង $\neq a_1$

$a'_2 \neq 9$ និង $\neq a_2$

……………..

$a'_p \neq 9$ និង $\neq a_p$

…………….

$a'_n \neq 9$ និង $\neq a_n$

……………………………..

ដោយ ធ្វើរបៀបនេះ យើងបានចំនួន x មួយថ្មី ផ្សេងពី តួទាំងអស់នៃស៊ីត (x_n) ។ ហើយ ដោយស៊ីត (x_n) ជាស៊ីតមួយធម្មតានៃចំនួនពិត នោះយើងឃើញថា សំនុំ R នៃចំនួនពិត មានធាតុច្រើន មិនអាចរាប់បាន ៖ ពីព្រោះបើកាលណា មាន ចំនួន x_n មួយ $\forall n$ នោះគេ អាចរកបាននូវចំនួន ពិត x មួយ ផ្សេងពី ចំនួន x_n ទាំងអស់នោះ $(\forall n)$ ជានិច្ច ។/

********************** ចប់ លំហាត់ តែប៉ុណ្ណេះ **********************

មាតិការ..		ទំព័រកថាខ័ណ្ឌ (ក្នុងអត្ថបទ)
(§)	**ជំពូក-VI (Chapitre-VI)** ការប្រមាណ ដេស៊ីមាល ចំនួនពិត **APPROXIMATIONS DECIMALES NOMBRES RÉELS**	

១.	លំនាំដើម	1
	1. រង្វាស់ និង តម្រុយ នៃ ទំហំ (Mesure et repérage des grandeurs).	**2**
២	**2. ចំនួនដេស៊ីមាល - ចំនួនប្រហែលរហូតដល់ដេស៊ីមាល** (nombres décimaux – Approximations décimales)	**7**
	ចំនួនប្រហែលខ្វះ ចំនួនប្រហែលលើស ប្រភាគដេស៊ីមាល (*fraction décimale*) ចំនួនដេស៊ីមាលរ៉ឺឡាទីប ចំនួនឌីយ៉ាឌីក (*nombre dyadique*) ប្រព័ន្ធប៊ីនែរ (*système de numération de base* 2)	
៣	**3. សញ្ញាណនៃតម្លៃប្រហែល** (Notion de valeur approchée)	**15**
	ចំនួនប្រហែលយកត្រឹម 10^{-n} និមិត្តរូប (*symbole*) ប្រមាណវិធីលើតម្លៃប្រហែល (*opération sur les valeurs approchées*)	
៤	4. **ការពង្រីកដេស៊ីមាល នៃផលចែក ឬ នៃឫសការេ** (***Développement décimal d'un quotient ou d'une racine carrée***)	**20**
	ផលចែកត្រឹមត្រូវ (*quotient exact*) ផលចែកប្រហែល (*quotient approché*) ស្វ៊ីតឡើង ឫសការេ (*racine carrée*)	
៥	**5. ការពង្រីកដេស៊ីមាលដោយគ្មានទីបញ្ចប់** (Développements décimaux illimités).	31
	ដេស៊ីមាលជួរ n (*décimale de rang n*) *D.D.I.* = ការពង្រីកដេស៊ីមាលដោយគ្មានបញ្ចប់ (*développement décimal illimité*) ទំនាក់ទំនងនៃ លំដាប់ទាំងអស់ (*relation d'ordre total*) ស្វ៊ីតគ្មានប្រែប្រួល (*suite monotone*) ស្វ៊ីតដំឡើង	

	(suite majorée) ស៊ីតបញ្ចុះ (suite minorée) គោលទាល់ក្រោម (borne inférieure) គោលទាល់លើ (borne supérieure)	
៦	**6. ការពង្រីកសមមូលគ្នា - សញ្ញាណនៃចំនួនពិត (Développements équivalents. Notion de nombre réel).**	41
	ដំណាងស្មើជ្រុង (représentation régulière) ដំណាងមិនស្មើជ្រុង (représentation irrégulier) D.D.I. Δ_0 Δ_9 ទំនាក់ទំនងនៃលំដាប់ (relation d'ordre) ស៊ីតកើននៃចំនួនពិត (suite croissante de nombres réels)	
៧	**7. វិធីបូក នៃចំនួនពិត (Addition des nombres réels).**	49
	គ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់គ្មានសល់(groupe abélien totalement ordonné) ស៊ីតកើន (suite croissante) ស៊ីតបន្ថែម (suite majorée) ស៊ីតចុះ (suite décroissante) ស៊ីតបន្ថយ (suite minorée)	
៨	**8. វិធីគុណ នៃចំនួនពិត (Multiplication des nombres réels).**	55
៩	**9. កម្មសិទ្ធិ ជា លក្ខណៈនៃចំនួនពិត (Propriétés caractéristiques des nombres réels).**	64
	ប្រព័ន្ធនៃ បាត 10 (système de base 10) ស្វ័យស័ត្យនៃទំហំដែលអាចវាស់បាន (axiome de grandeurs mesurables) ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ (axiome d'Archimède) ស្វ័យស័ត្យ នៃវិធីចែក (axiome de division) ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ (axiome de Cantor) ស្វ័យស័ត្យ នៃបន្ទាត់ធរណីមាត្រ (axiome de la droite géométrique)	

១០	**10. លក្ខណៈប្លែកនៃស្វ័យស័ត្យ ចំពោះចំនួនពិត (Caractérisation axiomatique des nombres réels).**	70
១១	**លំហាត់ មានចម្លើយ**	**79**
	11-1	79
	11-2	82
	11-3	88
	11-4	90
	11-5	93
	11-6	96
	11-7	100
	11-8	102
	11-9	103