ជំពូក-IV (Chapitre-IV)

<u>ចំណោទទាំងឡាយទាក់ទងនឹងចំនួនគត់</u>

PROBLEMES RELATIFS AUX ENTIERS

ការរាប់ (dénombrement) ប្រូបាប (probabilité)

កម្មសិទ្ធិចែកដាច់ (propriétés de divisibilité)

1.លំនាំដើម

ការរាប់ នូវចំនួន យើងតែងតែជួបក្នុងការ រស់នៅរាល់ថ្ងៃ។ ឧទាហរណ៍ដូចជា ៖

- គេឲ្យឈ្មោះ តួឯកភាពយន្ត 10 នាក់។ គេឲ្យ តម្រៀប ទៅតាមការស្រឡាញ់ តាំងពី លេខ១ ដល់ លេខ១០ ។ តើការ តម្រៀប នេះ មានប៉ុន្មាន របៀបខុសគ្នា ។
- ថ្នាក់មួយ មានសិស្ស 30 នាក់ ។ គេចែកសិស្ស ទាំងនោះ ជា ពីរ ពួកមានចំនួន ស្មើគ្នា ឬ ក៏ ជាពីរពួក មានចំនួន 10 នាក់ និង 20នាក់ ។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបខុសគ្នា ចំពោះ ពួក ស្មើគ្នា និង ប៉ុន្មានរបៀបខុសគ្នា ចំពោះ ពួក 10នាក់ និង 20នាក់ ។

បើយើង មិនគិត ពីសិស្ស ឬ វត្ថុណាមួយ នោះទេ យើងបានជាចំណោទ-គំរូ ពីរ គឺ ៖

<u>ចំណោទ-ទី១</u>

តើមានប៉ុន្មានរបៀប គេអាចរៀប វត្ថុដែលគេឲ្យមានចំនួនទាំងអស់ n ។(ការតម្រៀប នីមួយៗ នៃវត្ថុទាំងនោះ ជា ប៊ីសេចស្យុង ពី N_n^* [1]ទៅលើសំនុំបានមកពី វត្ថុទាំង

[1] $N_n^* = \{1, 2, 3, ..., n\}$

អស់នោះ) ? ។

ចំណោទ-ទី២

តើមានសំនុំ ប៉ុន្មាន ដែលមានវត្ថុចំនួន p បានមកពីការ ដកយកចេញពី សំនុំ E ដែលមាន វត្ថុចំនួន n $(n \geq p)$?

យើងសង្កេតឃើញថា ចំណោទ-ទី២ ដែលផ្ទុយពីចំណោទ-ទី១ ត្រង់គ្មានការតម្រៀបតាមលំដាប់។ តែ ដើម្បីនឹងធ្វើការនេះ មុនដំបូង យើងត្រូវតែ រើសយក ធាតុណាមួយក្នុង E បន្ទាប់មក យើងរើសយកធាតុមួយទៀតដែលនៅសល់ក្នុង E ហើយយើងធ្វើរបៀបនេះ តៗមក រហូត ដល់បាន ចំនួន p ធាតុ។ ដោយ ធ្វើរបៀបនេះ យើងបានស៊ីតមួយ ដែលមានចំនួន p ធាតុនៃ E ខុសគ្នា ។ ហើយដោយយើងមិនទាន់ដោះស្រាយនូវចំណោទ-ទី២នេះភ្លាមទេ យើងនឹង ដោះស្រាយនូវ ចំណោទ តទៅនេះ ជាមុនសិន ៖

ចំណោទ-ទី៣

តើយើងអាច មានស៊ីត[2] ដែលមាន p ធាតុ ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលអាចដកចេញពី សំនុំមួយដែលមាន n ធាតុ $(p \leq n)$។

យើងចាប់ ដោះស្រាយចំណោទ-ទី៣ នេះជាមុនសិន ហើយបន្ទាប់មក ចំណោទ-ទី១ ទៅជា ករណីពិសេស នៃចំណោទនេះ ដោយគ្រាន់តែ យក $n = p$ ។ ហើយដើម្បីនឹងបានចម្លើយនៃចំណោទ-ទី២ យើងគ្រាន់តែ «ប្រមូលប្រមូលគ្នា» នូវ ស៊ីតដែលមាន p វត្ថុ ដែលយើងបាន នៅក្នុងចំណោទ-ទី៣ នេះដែរ គឺថាយើង ធ្វើប្រប្រាស់ពី ចំលាស់ (ការរៀបជាលំដាប់) នៃចំណោទ-ទី១។ ដូច្នេះ ចម្លើយ នៃចំណោទ-ទី២ នឹងបាន ក្រោយគេ ដោយប្រើ ចម្លើយនៃចំណោទ-ទី១ និង ចំណោទ-ទី៣ ។

---

[2] កាលណាគេនិយាយអំពី ស៊ីត នោះបានន័យថា រៀបជាលំដាប់ហើយ ពីព្រោះធាតុទាំងឡាយគឺ ដូចជា ៖ $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$

2.បំលាស់ (arrangements) – ពែមុតាស្យុង (permutations).

បំលាស់ ដូចខ្ញុំបានជម្រាបនៅ §-1 ថាយើងដោះស្រាយចំណោទ-ទី៣ ជាមុនសិន គឺថា គេឲ្យសំនុំ E មួយ មាន n ធាតុ ហើយគេថា ៖

ស្វីត មួយដែលមាន p ធាតុខុសគ្នា នៃ E គឺជា បំលាស់ p ទៅ p ធាតុនៃ E ។

បំលាស់ ពីរ ខុសគ្នា កាលណា កាលណា ជម្រើសខុសគ្នា ឬ ក៏ ការរៀបតាមលំដាប់ខុសគ្នា ។ ចំណោទ ទី៣ គឺ រកចំនួន A_n^p នៃ បំលាស់ p ទៅ p នៃ E ។

គេបានចំលាស់របៀបនេះ ដោយ មុនដំបូង យើង ជ្រើស យកធាតុទី ១ បន្ទាប់មក ធាតុទី២ ហើយបេះតែ តៗ ទៅ ៖ បើយើងជ្រើសបាន $(p-1)$ ធាតុដំបូងហើយ នោះធាតុទី $p^{ième}$ ត្រូវរើសយកក្នុង សំនុំនៃ $n-(p-1)$ ធាតុដែលនៅសល់ ដូច្នេះ យើងអាចមាន $n-(p-1)$ ជម្រើសៗ ដូច្នេះ យើងបាន រូបមន្ត រេគារ៉ង់ ៖

$A_n^p = [n-(p-1)]A_n^{p-1}$ (F1)

ហើយដោយ $A_n^1 = n$ នោះយើងបាន ដោយ រេគារ៉ង់ មានទីបញ្ចប់ នូវរូបមន្ត ជា ទូទៅមួយ ៖

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots..(n-p+1)} \quad \text{(F2)}$$

ដោយប្រើ (F1) ហើយដោយយក $p = 2,3,4,\ldots\ldots.,p$ ហើយដោយគុណ ទាំងសង្ខាង នោះយើងបាន៖

$p = 2$: $A_n^2 = (n-1)A_n^1 = (n-1)\,n$

$p = 3$: $A_n^3 = (n-2)A_n^2$

$p = 4$: $A_n^4 = (n-3)A_n^3$

………………………………………………………………………

$p = p$: $A_n^p = [n-(p-1)]A_n^{p-1}$

$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots.[n-(p-1)]$ ដែលជារូបមន្ត (F2) ។

ជាពិសេស ចំពោះ $p = n$ គេបាន ៖

$A_n^n = 1.2.3 \ldots\ldots\ldots.n$

តែ A_n^n គឺមិនមែន អ្វីក្រៅពី ចំនួន ស៊ីត ដែលមាន n ជាតុខុសគ្នា ដែលគេអាចបង្កើត បានដោយ n វត្ថុដែលគេឲ្យ គឺជា ជាចំនួន ចំលាស់ ទាំងអស់ដែលខុសគ្នា នៃសំនុំដែល មាន n ជាតុ ។ ដូច្នេះ យើង បានឆ្លើយទៅនឹង សំនួរ នៃចុះណោទ ទី១ ។

ចំនួន $A_n^n = 1.2.3 \ldots\ldots\ldots.n$ គេតាងដោយ $n!$ មើលថា « ហ្វាក់តូរៀល n »

ហើយដោយ ការកត់ត្រានេះ គេអាចសរសេរ A_n^p ជា $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ ។

ការស្នើ (IV,2,1)

ចំនួន ចំលាស់ p ទៅ p នៃ n ជាតុ $(n \geq p)$ គឺ ៖

$$A_n^p = n(n-1)\ldots\ldots\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ ។}$$

គឺជា ផលគុណ នៃ p ចំនួនគត់ តៗ គ្នា ដោយ n ជាចំនួន ធំជាងគេ ។ ហើយចំពោះ $n = p$ ផលគុណនោះ ទៅជា ចំនួន ចំលាស់ ដែលខុសគ្នា នៃ សំនុំ ដែលមាន n ជាតុ គឺ $n!$ ។

ឧទាហរណ៍

គេមាន $10! = 3\,628\,800$ ចម្លើយដែលអាចមាន នៅពេលប្រឡងប្រជែង ដែលគេ ឲ្យយើង តម្រៀប តាមការពេញចិត្ត 10 វត្ថុដែលគេឲ្យ។ គេមាន $6! = 720$ របៀប ដាក់ភ្ញៀវ 6 នាក់ ឲ្យអង្គុយ ជុំវិញ តុបាយ បើសិនជាគេមិនកំណត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ក្នុងការ រៀបភ្ញៀវនេះ។ តែ គេអាចបង្ហាញ ថា ចំនួននេះ ធ្លាក់ចុះមកត្រឹម $2 \times 3! \times 3! = 72$ បើ សិនជាគេឲ្យ ប្រុស 3នាក់ និងស្រី 3នាក់ អង្គុយ ដោយ ប្រុសនិងស្រី ឆ្លាស់គ្នា ។

សង្កេត

ចំនួន $n!$ កើនរហ័សណាស់ ជាមួយនឹង n (អ្នកខ្លះគេថា ចំណុច ! សម្តែងនូវការភ្ញាក់របស់ មាស៊ីនគិតលេខ ចំពោះ លទ្ធផលដ៏ធំសំបើមនេះ) ។ ដូច្នេះ គេអាច តម្រៀបបាន ជា ចំលាស់ តែ កាលណាចំនួន n ជាតុនៅតិច នៅឡើយ ។ គេអាច សរសេរ $2\times 3=6$ ចំលាស់ ចំពោះ 3 អក្សរ a,b,c យក ពីរតួម្តង ពីរតួម្តង គឺ ab, ba, ac, ca, bc, cb ហើយ $3!=6$ ចំលាស់ នៃ 3 អក្សរនោះដែរ គឺ $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ តែគេពុំអាច យក n ឲ្យហួសពី 4 ទេ បើមិនចង់មិនចង់សរសេរ ច្រើនទំព័រ ដោយឥតប្រយោជន៍ ។

ចំណោទ អរូបី (abstrait) ដែលមកជាមួយ

ចំលាស់ p ទៅ p ជាតុខុសគ្នា នៃសំនុំ E កើតបានជា ស្វ៊ីត មួយ ដែលមាន p ជាតុខុសគ្នា នៃ E តាំងដោយ $x_1,\ x_2, \dots\dots, x_p$ ។ ដោយជាតុ ទាំងអស់នោះខុសគ្នា ដូច្នេះ $i\neq j$ => $x_i\neq x_j$ ។ បើយើង តាំង ជានិច្ច ដោយ N_p^* សំនុំ $1, 2, 3, \dots\dots, p$ នៃចំនួនគត់ នៅចន្លោះ ពី 1 ទៅ p យើងអាចថា ការឲ្យនូវ សំលាស់នេះ ក៏ដូចជា ការឲ្យនូវ អាំងសេចស្យុង ពី N_p^* ទៅក្នុង E កំណត់ដោយ $i\to x_i$ ហើយ <u>ចំនួន</u> A_n^p អាចបកស្រាយ ជា<u>ចំនួន</u> អាំងសេចស្យុង ពី N_p^* ទៅក្នុង E ចំពោះ សំនុំ E មួយដែលមាន n ។ ជាទូទៅ A_n^p ស្មើនឹង ចំនួន អាំងសេចស្យុង ពី សំនុំ X មួយ ដែលមាន p ជាតុ ទៅសំនុំ Y មួយដែលមាន n ជាតុ ពីព្រោះ ដោយមាន ប៊ីសេចស្យុង ពី X ទៅ N_p^* នោះយើង អាចនាំមកវិញ ក្នុង ករណីដែល $X=N_p^*$ ។ សូមនឹកមកវិញថា ការអនុវត្តន៍ ពីរ f និង g ពី X ទៅ Y ខុសគ្នា បើកាលណា មាន ជាតុ x ណាមួយ <u>យ៉ាងហោច</u> នៅក្នុង X ដែល គេបាន $f(x)\neq g(x)$ ។

ចំពោះ $n=p$ គេឃើញថា ចំនួន ប៊ីសេចស្យុង ពី សំនុំមួយ ដែលមាន n ជាតុ <u>ទៅលើ</u> សំនុំមួយ ដែល n ជាតុ គឺស្មើនឹង $n!$ ។ ពីព្រោះថា បើ X និង Y មាន <u>ចំនួន</u>

ធាតុ ស្មើគ្នា នោះ អាំងសេចស្យុងមួយ ពី X ទៅក្នុង Y គឺត្រូវតែ ជា ប៊ីសេចស្យុង បើមិនដូច្នោះទេ X គ្រាន់តែ អេគីប៉ូតង់ នឹង ផ្នែកមួយតែប៉ុណ្ណោះ នៃ Y ដែលផ្សេងពី Y ដូច្នេះវាផ្ទុយពី ទ្រឹស្តី បកតិសំខ្យា មានព្រំដែន នៅ **ជំពូក**-III ។ ជាពិសេស ចំនួន ប៊ីសេចស្យុង ពី សំនុំ មាន n ធាតុ ទៅលើសំនុំដដែល មាន $n!$ ។ ដោយគេបានហៅថា ពែមុតាស្យុង (permutation) នៃសំនុំមួយ គឺ ជា ប៊ីសេចស្យុង ពី សំនុំនោះ ទៅលើ សំនុំដដែល ។ ដូច្នេះ យើងអាចថ្លែងថា ៖

__ការស្មើ (IV,2,2)__

ចំនួន ពែមុតាស្យុង (permutations) នៃសំនុំមួយ មានព្រំដែន មាន n ធាតុ គឺស្មើនឹង $n!$ ។

__សង្កេត__

ពេលខ្លះ គេនិយាយថា ចំលាស់ នៃសំនុំ E គឺជា ស៊ីត បានមកពីតម្រៀប តាមលំដាប់នូវធាតុនៃ E តែតាមគោលការណ៍ ចំលាស់ នៃ E គឺជា វិធីប្រតិបត្តិការ មួយ ដែល ឆ្លង ពីតម្រៀបមួយ មក តម្រៀបមួយផ្សេងទៀត ៖ គេ ច្រើនតែ ច្រឡំ លទ្ធផល និង កិច្ចការ ដែល ផ្តល់ លទ្ធផល ។ យើងនឹងឃើញ ន័យរបស់ពាក្យ ពែមុតាស្យុង នៅពេលដែល និយាយអំពី ពែមុតាស្យុងវិលជុំវិញ (permutation circulaire) ៖ សំនុំ E គេរៀបបានជាស៊ីត $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ គេហៅថា ពែមុតាស្យុងវិលជុំវិញ គឺ ការអនុវត្តន៍ ពី E ទៅ E កំណត់ដោយ $f(x_i) = x_{i+1}$ ចំពោះ $i < n$ ហើយ $f(x_n) = x_1$ ។

សូម រំលឹកថា ចំលាស់ ទាំងអស់ នៃ សំនុំ E បង្កើតបានជា គ្រុប (groupe) មួយ ហៅ គ្រុបឆ្លុះ (groupe symétrique) (មើល ជំពូក II – 8) ។ បើ E មាន n ធាតុ យើងបាន គ្រុបមួយ ដែល មាន $n!$ ធាតុ។

3. បន្សំ (Combinaisons) – រូបមន្តនៃ ទ្វេធា (*Formule du binôme*.

យើងត្រឡប់មកចំណោទ-ទី២ វិញ ៖ គេឲ្យ សំនុំ E មាន n ធាតុ យើងហៅថា « បន្សំ p ទៅ p នៃ n ធាតុ » គឺ សំនុំនៅក្នុងE ដែលមាន p ធាតុ ។ បន្សំ p ទៅ p នីមួយៗ នៃធាតុនៃE ផ្តួផ្គងបាននឹង $p!$ ចំលាស់ p ទៅ p ដែលបានដោយ តម្រៀបដោយគ្រប់របៀបទាំងអស់ ដែលអាចធ្វើបាន ចំពោះ p ធាតុ ដែលគេបានជ្រើសរើស។ ហើយ បន្សំពីរ ខុសគ្នា ត្រូវតែផ្ទួនឹង ចំលាស់ ខុសគ្នា ពីព្រោះ បន្សំ ជា សំនុំ ដូច្នេះ បន្សំពីរខុសគ្នា ក៏ដូចជាថា សំនុំពីរខុសគ្នាដែរ ។ ដូច្នេះ បើគេ តាង C_n^p ជា <u>ចំនួន</u> បន្សំ p ទៅ p នៃ ធាតុរបស់ E គេបាន $A_n^p = p!\,C_n^p$ ។ ដូច្នេះ យើងអាច ថ្លែងថា ៖

<u>ការស្មើ (IV,3,1)</u>

ចំនួន បន្សំ (combinaisons) p ទៅ p នៃ n វត្ថុ គឺ ៖

$$C_n^p = {}^{1}/_{p!} \times A_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)........(n-p+1)}{1.2.3.\quad .p} \text{ ។}$$

ចំនួន C_n^p យើងនឹងឃើញ នៅពេលខាងមុខ គេហៅថា មេគុណ នៃ ទ្វេធា ($coefficients\ du\ binôme$) ។ នៅពេលខ្លះ ក្នុងការសរសេរ គេ ជំនួស C_n^p ដោយ $\binom{n}{p}$ ។

<u>សង្កេត</u>

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ បង្ហាញ ថា } C_n^{n-p} = C_n^p \quad (R1)$$

ទំនាក់ទំនង (R1) អាចគ្រោងទុកជា មុនបាន ពីព្រោះថា មួយផ្នែកៗ ដែលមាន p ជាតុ នៃ E ផ្ទូទៅនឹង ផ្នែក រួមបង្រួប់ មាន $(n-p)$ ជាតុ (*la partie complémentaire composée de $n-p$ éléments*) នៃ E តែមួយគត់ ។ ដូច្នេះ ការផ្គូផ្គងនេះជា ប៊ីសេចស្យុង ។ ហើយយើងក៏អាចថា C_n^p ជាចំនួន ប៉ាទីស្យុង[3]នៃ E ជា ពីរ សំនុំ ៖ មួយផ្នែក មាន p ជាតុ ហើយមួយផ្នែកទៀតមាន $(n-p)$ ជាតុ ។

ម្យ៉ាងទៀត យើងសង្កេតឃើញថា អត្ថន័យនៃមេគុណ C_n^p នៅតែមានន័យ ចំពោះ $p=0$ និង $p=n$ ប៉ុរីបើ ក្នុងនិយាយ $p=0$ យក សូន្យវត្ថុ មិនមានន័យទេ។ ចំនួន C_n^0 គឺជា ចំនួន នៃសំនុំ ទទេ (*ensemble vide* $\emptyset$) ដែល គេអាចដកចេញពី E ។ ដោយ សំនុំ ទទេ មានតែមួយ គត់ នោះគេបាន $C_n^0 = 1$ ។ ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនង $C_n^p = C_n^{n-p}$ នៅតែ ត្រូវដដែល ចំពោះ $p=0$។ ដើម្បី ឲ្យ រូបមន្ត C_n^p ដែលបាននោះ ត្រូវគ្រប់ ករណី យើង តាំងដោយ សន្មត ជា និយមន័យ ថា $0!=1$ ក៏ដូចជាថា មានរបៀបតែមួយគត់ តម្រៀប សំនុំ ទទេ ។

ការសង្កេតជាចុងក្រោយ តាមនិយមន័យ មេគុណ <u>C_n^p គឺត្រូវតែជា ចំនួនគត់ ធម្មជាតិ</u> (*un entier naturel*) ។ ដូច្នេះ យើងអាចថ្លែងថា៖

<u>ការស្មើ (IV,3,2)</u>

ផលគុណ នៃ p ចំនួនគត់ បន្តគ្នា ចែកដាច់ ជានិច្ច ជាមួយនឹង $p!$ ។

ពីព្រោះ $C_n^p = \dfrac{n(n-1)(n-2)........(n-p+1)}{1.2.3.\quad .p} = \dfrac{n(n-1)(n-2)........(n-p+1)}{p!}$ ។

<u>ឧទាហរណ៍</u> $5\times6\times7\times8\times9\times10 \Rightarrow p=6$ ដូច្នេះ $5\times6\times7\times8\times9\times10$

[3] ប៉ាទីស្យុង នៃ E បានន័យថា ផ្នែកនីមួយៗ ដាច់ៗ ពីគ្នា ហើយផ្នែកទាំងអស់រួមគ្នា បានជាសំនុំ E ឡើងវិញ។

ចែកនឹង 6! ដាច់ តាមការស្មើ (IV,3,2) ខាងលើ ។

រូបមន្ត នៃទ្វេធា ***(formule du binôme)***

រូបមន្ត នៃទ្វេភាគ ដែលងាយ និង សំខាន់ ឥឡូវនេះ មានរៀន នៅថ្នាក់ទី ១២ ផ្នែក គណិតសាស្ត្រ។ ដើម្បីនឹងបាន រូបមន្តនេះ យើងគ្រាន់តែ ប្រដូច $(a+b)^n$ ទៅនឹង ផល គុណ នៃ n កត្តា $(a+b)$ ៖ ការបំបែកនៃ ផលគុណ នេះ គឺជា ផលបូក នៃ ឯកធា ទាំងឡាយ (*une somme de monômes*) មានទម្រង់ $a^p b^{n-p}$ ហើយគេបាន ឯកធា $a^p b^{n-p}$ នៅពេលណា ដែលគេយក តួ a នៅក្នុង ចំណោម p កត្តា នៃ សំនុំដែលមាន n កត្តា និង យក b នៅក្នុងចំណោម $(n-p)$ កត្តា នៅសល់ពីការបានរើស p កត្តា[4]។ ដូច្នេះ គេបាន ឯកធា $a^p b^{n-p}$ មានចំនួន ច្រើនដង ស្មើនឹង ចំនួន ប៉ាទីស្យុង ជាពីរផ្នែក គឺ ផ្នែក ដោយ មួយផ្នែក មាន p កត្តា និង ផ្នែក មួយទៀតជាគូជាមួយ ដែលមាន $(n-p)$ កត្តា ។ ហើយ ដោយ ចំនួន ប៉ាទីស្យុង បែបនេះ មាន C_n^p ដូច្នេះ មេគុណ នៃ ឯកធា $a^p b^{n-p}$ ក៏មាន C_n^p ដែរ ។ ដូច្នេះ យើងបាន រូបមន្ត ៖

(1)

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p b^{n-p} = b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^p a^p b^{n-p} + \ldots + a^n}$$

---

[4] យើងធ្លាប់ឃើញ ការ ផ្សំ p ទៅ p ក្នុងចំណោម n វត្ថុ ហើយ វត្ថុ ច្រើនតែជា តួ អក្សរ $a, b, c, \ldots$ តែ នៅពេលនេះ វត្ថុ គឺ $(a+b)_1, (a+b)_2, \quad (a+b)_3, \ldots, (a+b)_n$ ដោយ $(a+b)_i$ នីមួយៗ ស្មើ នឹង $(a+b)$ ។ ឧបមា $n=5$ យើង រក ការបំបែកនៃ $(a+b)^5$ ហើយ ចំពោះ $p=2$ មេគុណ ទាំងឡាយ នៃឯកធា $a^2 b^3$ នោះបានដោយ ៖

$[\,a+b)_1\,(a+b)_2]\ [(a+b)_3(a+b)_4(a+b)_5]$ ឬ $\{1,2\} \cup \{3,4,5\}$

និង $[\,a+b)_1\,(a+b)_3\,]\ [(a+b)_2(a+b)_4(a+b)_5]$ ឬ $\{1,3\} \cup \{2,4,5\}$ ….. និង …..

ដូច្នេះ មេគុណ នៃ ឯកធា $a^2 b^3$ មានចំនួន $C_5^2 = 10$ ។

ត្រីកោណ ប៉ាស្កាល់ (Triangle de Pascal)

ដោយទំនាក់ទំនង $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$ (S1) យើងអាចទាញយកនូវ ទំនាក់ទំនង រវាង មេគុណ នៃ ស្វ័យគុណ n និងស្វ័យគុណ $n+1$ ។ យើងបាន ដូច តទៅនេះ ៖

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p\, a^p b^{n+1-p} \quad \text{(S2)}$$

នៅក្នុង (S2) នេះ គេសរសេរ $(a+b)^{n+1}$ ដោយពីរ របៀប គឺ ៖

$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p b^{n-p}$ (S2-1) បានដោយ (S1)

$(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p\, a^p b^{n+1-p}$ (S2-2) បានដោយ រូបមន្ត (1) ចំពោះ $n = (n+1)$ [5]

គឺថា ដោយយក $n+1$ មកជំនួស n ។ ដោយ (S2-1) និង (S2-2) ជា ពហុធា (polynômes) ដូច្នេះ ដើម្បី (S2-1) = (S2-2) លុះត្រាតែ ឯកធា ដែល មាន ស្វ័យគុណ ស្មើគ្នា ត្រូវមានមេគុណស្មើគ្នាដែរ ។ ឥឡូវនេះ យើង រកមេគុណ នៃឯកធា $a^p b^{n-p}$ របស់ (S2-1) និង (S2-2) ។

$$\text{(S2-1)} \Rightarrow \quad (a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n}\left[\, C_n^p\, a^{p+1} b^{n-p} + C_n^p a^p b^{n+1-p}\right]$$

$$= C_n^0 ab^n + C_n^0 b^{n+1} + \ldots + \boldsymbol{C_n^{p-1} a^p b^{n+1-p} + C_n^p a^p b^{n+1-p}} + \ldots \quad \text{(L1)}$$

$$\text{(S2-2)} \Rightarrow \quad (a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p\, a^p b^{n+1-p}$$

$$= C_{n+1}^0 b^{n+1} + \ldots + \boldsymbol{C_{n+1}^p\, a^p b^{n+1-p}} + \ldots \quad \text{(L2)}$$

ដោយ (L1) និង (L2) យើងបាន ទំនាក់ទំនង រវាង មេគុណនៃ $a^p b^{n+1-p}$ ដូចតទៅ៖

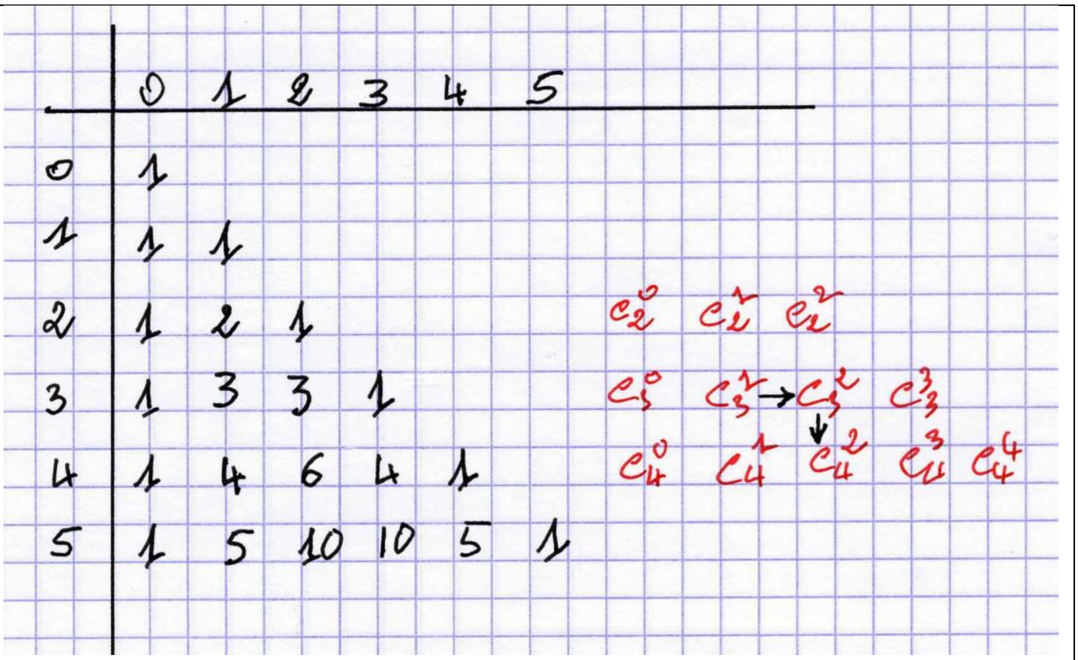
(2) $$\boldsymbol{C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p \quad (1 \le p \le n)}$$

---

5 ចំពោះអ្នកធ្លាប់រៀន ពត៌មានវិជ្ជា សរសេររបៀបនេះ មិនមានអ្វីប្លែកទេ ពីព្រោះ នៅ ពត៌មានវិជ្ជា $A = B$ មានន័យថា គេយក B មក ជំនួស A ដែលនៅ ខាងឆ្វេង សញ្ញា « = »។ ដូចនៅខាងលើនេះ ខ្ញុំយក តម្លៃថ្មី $(n+1)$ មកជំនួស តម្លៃចាស់ n ។ គឺថា កន្លែងណា មាន n ខ្ញុំដាក់ជំនួសវិញដោយ $n+1$ ។

ទំនាក់ទំនង (**2**) អាចឲ្យយើងស្គាល់ មេគុណ ថ្នាក់ $\boldsymbol{n+1}$ កាលណាគេស្គាល់មេគុណ ថ្នាក់ $\boldsymbol{n}$ ។ ដើម្បី នឹងបានយ៉ាងនេះ គេ ដាក់ មេគុណ ទាំងអស់ ក្នុង តារាងមួយ ដែល មាន ច្រកចូលពីរ (*un tableau* à *double entrée*) :

(T1)



នៅក្នុងតារាង នេះ មេគុណ C_n^p នៅត្រង់បន្ទាត់កាត់គ្នា រវាង បន្ទាត់ ឈរ (colonne) p និងបន្ទាត់ ដេក (ligne) n ។ នៅតាមបន្ទាត់ដេក (*chaque ligne*) នីមួយៗ មានមេគុណ របស់ $(a+b)^n$ ចំពោះ $n=0$ $n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$ $n=5$ ។

ដូចជា ចំពោះ $n=2$ យើងដឹងហើយថា $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ដូច្នេះ មេគុណគឺ 1 2 1 ដែលយើងឃើញ នៅ លើបន្ទាត់ដេក លេខ 2 នៃតារាង ។ ហើយចំពោះ $n=3$ យើងឃើញថា ក្នុង មេគុណ 1 3 3 1 មេគុណ 3 ទី១ បានមកដោយ យក 1 + 2 ដែល ជា មេគុណ នៅលើបន្ទាត់ដេកលេខ **2** ហើយ ចំពោះមេគុណ 3 ទី២ បានមក

ដោយ យក $2+1$ ដែល ជា មេគុណ នៅលើបន្ទាត់ដេកលេខ 2 ដែរ ។ ចូរមើល ក្នុង តារាង នូវ មេគុណ C_n^p សរសេរ ជា ពណ៌ក្រហម ដូចជា $C_4^2 = C_3^1 + C_3^2$ ជាដើម ។ ជាទូទៅ $(\forall n \in N)$ ទំនាក់ទំនង **(2)** អាចឲ្យយើង គណនា មេគុណ លំដាប់ $n+1$ កាលណា គេដឹង គណនា មេគុណ លំដាប់ n ។ ដូច្នេះ យើងតម្រៀប មេគុណ C_n^p នៅក្នុងតារាងមួយ ដែលមានច្រកចូលពីរ (មើល (T1) ហើយ មេគុណ $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{p}}$ នៅត្រង់ បន្ទាត់កាត់គ្នា គឺបន្ទាត់ ឈរ p និងបន្ទាត់ដេក n ។ ដោយ រៀបរបៀបនេះ យើងឃើញថា C_{n+1}^p នឹង ជា ផលបូកនៃ ពីរ ចំនួន ដែលនៅ បន្ទាត់ដេក ខាងលើវា ៖ មួយនៅ លើ បន្ទាត់ ឈរ ជាមួយគ្នា ហើយមួយទៀត នៅលើបន្ទាត់ ឈរពីមុន ។ ដើម្បីឲ្យគ្រប់ តារាងនោះ ត្រូវមាន ជាមុននូវ បន្ទាត់ឈរ សន្ទស្សន៍ សូន្យ (une colonne d’indice zéro) ដោយមាន ចំនួន 1 នៅក្នុងនោះ (គឺ មេគុណ C_n^0)   ហើយនិង បន្ទាត់ដេក សន្ទស្សន៍ សូន្យ (une ligne d’indice zéro) ដែលមានតែ មួយតួ គឺ $C_0^0 = 1$ ។ តារាង រាងត្រីកោណ   ដែលបាន នោះ   ហៅថា <u>ត្រីកោណប៉ាស្កាល់</u> ដែលអាចឲ្យគណនា ដោយលឿននូវមេគុណ $\boldsymbol{C_n^p}$ ចំពោះ ចំនួន $\boldsymbol{n}$ តូចៗ ដូចនៅ តារាង (T1) ខាងលើ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ។

<u>របៀបបង្ហាញ ផ្សេងទៀត</u>

គេអាចបង្ហាញ រូបមន្ត (2) ដោយប្រើ កន្សោមនៃ $\boldsymbol{C_n^p}$ (expression de C_n^p) ឬ មួយ ដោយ ការបកស្រាយត្រង់ៗតែម្តង គឺថា យើងតាងដោយ $\boldsymbol{E'}$ សំនុំមាន $n+1$ ធាតុ បានមក ដោយ បន្ថែម ធាតុ a មួយថ្មី ទៅក្នុង សំនុំមួយដែលមាន n ធាតុ ។ ដើម្បី បាន សំនុំ ដែលមាន p ធាតុ គេអាច ៖

- ឬមួយយក p ធាតុ ក្នុង E ដែលធ្វើឲ្យបាន C_n^p ជម្រើសដែលអាចមាន

- ឬមួយយក $p-1$ ជាតុ ក្នុង E ដែលធ្វើឲ្យបាន C_n^{p-1} ជម្រើសដែលអាចមាន បន្ទាប់មក យើងយក ជាតុ a មកបន្ថែម ដើម្បីបានទៅជា សំនុំ មាន p ជាតុ។ នៅទីបំផុត យើងបាន ៖

$C_{n+1}^{p} = C_n^p + C_n^{p-1}$ ជម្រើស ដែលអាចមាន ។

ឥឡូវយើងបាន (2) ហើយ ដូច្នេះ គេអាច បាន រូបមន្ត នៃ ទ្វេធា ដោយ រ៉េគារ៉េង ដោយ ប្រើ ទំនាក់ទំនង $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$ ហើយដោយ សន្មតថា រូបមន្ត (1) ត្រូវរហូតដល់ លំដាប់ n ហើយគេត្រូវបង្ហាញថា រូបមន្តនោះ ក៏ត្រូវដល់ លំដាប់ $n+1$ ដែរ ។

ការអនុវត្តន៍ របស់ រូបមន្តនៃទ្វេធា (Applications de la formule du binôme)

បើនៅក្នុងរូបមន្ត (1) យើងយក $a = b = 1$ នោះយើងបានទំនាក់ទំនង៖

$$\boldsymbol{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots + C_n^p + \ldots\ldots + C_n^n = 2^n} \quad (3)$$

ផលបូក នៅខាងឆ្វេង ក្នុង (3) ដំណាងចំនួន ទាំងអស់នៃផ្នែក របស់ សំនុំដែលមានn ជាតុ ដោយ រាប់ទាំង ផ្នែក ទទេ និង សំនុំទាំងមូលផង ។ យើងថ្លែងថា៖

ការស្មើ (IV,3,3)

បើ សំនុំ E មាន n ជាតុ សំនុំ $\mathcal{P}$(E) នៃផ្នែកទាំងឡាយ នៃ E នោះមាន 2^n ជាតុ ។

ដោយនៅក្នុង $\mathcal{P}(E)$ ក៏មានផ្នែក ទទេ និងផ្នែក ដែលមានជាតុតែមួយ ហើយ ខុសគ្នា ពី ផ្នែកមួយទៅ ផ្នែកមួយ ដែល ទាំងអស់ មាន n ដូច្នេះ

បើរាប់ទាំង ផ្នែកទទេផង នោះ ទាំងអស់មាន $n+1$។ ដូច្នេះ យើងបាន

វិសមភាព មួយដ៏សំខាន់ គឺ ៖

$$2^n \geq n+1$$

ដែលមាននៅក្នុង ការស្នើ (III, 8, 3) ។

គេអាច រក ផលបូកនៃ $\sum C_n^p$ ដោយ គណនា ជាពីរ របៀបខុសគ្នា ទី១ ដោយរក ចំនួន ការអនុវត្តន៍ ខុសគ្នាពី សំនុំ E មួយដែលមាន n ធាតុ ទៅ សំនុំ ដែលមានតែពីរ ធាតុ ។ បើយើងតាង ដោយ E សំនុំទី១ និង a, b ធាតុនៃសំនុំទី២ F នៅពេលនោះ ការ អនុវត្តន៍ នីមួយៗ កំណត់បាន ប៉ាទីស្យុងមួយ នៃសំនុំ E គឺជាបែកសំនុំ E ជាពីរ សំនុំ A និង B ដាច់ពីគ្នា ដោយ $A = f^{-1}(a)$ និង $B = f^{-1}(b)$ ៖ ដូច្នេះ ចំនួន ការអនុវត្តន៍ ពី E ទៅ F ស្មើ នឹង ចំនួន ប៉ាទីស្យុង នៃ E ជា ពីរ សំនុំ គឺ $[\sum_{p=0}^{n} C_n^p]$ [6] ។ ម្យ៉ាងទៀត ដើម្បី កំណត់ ការអនុវត្តន៍ ពី E ទៅ F យើងគ្រាន់តែ សម្រេចថា ក្នុង n ធាតុ នៃ E តើ យើងយក ធាតុណាខ្លះ ដែល ផ្គូ នឹង a ឬនឹង b ដូច្នេះ ត្រូវមានជម្រើសទាំងអស់ 2^n ។ ដូច្នេះ យើងឃើញឡើងវិញ នូវ រូបមន្ត (3) ។ ដើម្បី យល់ការជម្រើស ដែលឲ្យ 2^n នោះ មាន ឧទាហរណ៍ ខាងក្រោមនេះ ចំពោះ $n = 3$ និង សំនុំ E = $\{x_1, x_2, x_3\}$ ៖

*

*

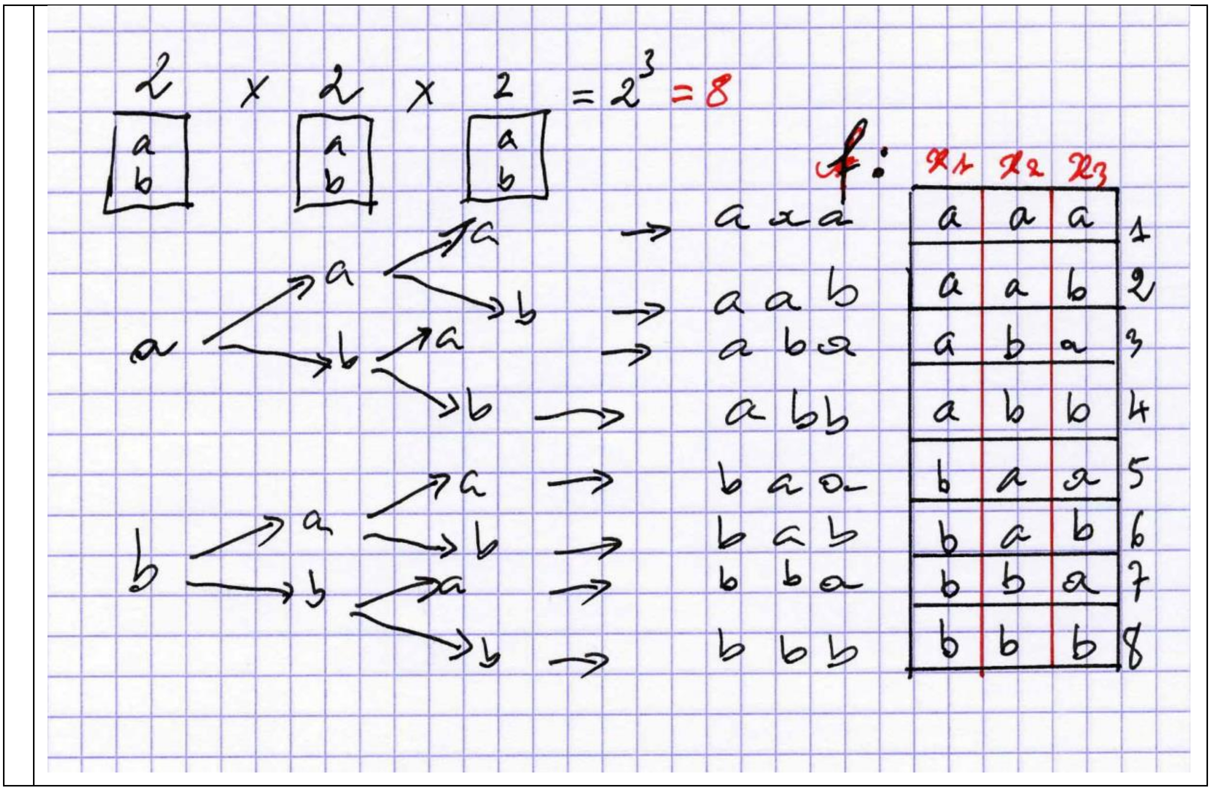
*

*

*

---

[6] ចំពោះ ប៉ាទីស្យុង នៃសំនុំ $\boldsymbol{E}$ ជាពីរ សំនុំ បើ A ជាសំនុំទី១ នៃ E យើងយកសំនុំទី២ $B = E - A$ ហើយ សំនុំ A អាច ទទេ អាចមាន ១ ធាតុ អាចមាន ២ធាតុ អាចមាន ៣ធាតុ .....អាចមាន n ធាតុ ។ ចំនួន A ទទេ គឺ C_n^0 ចំនួន A មាន ១ធាតុ គឺ C_n^1 ចំនួន A មាន ២ធាតុ គឺ C_n^2 ......ចំនួន A មាន n ធាតុ គឺ C_n^n ។



សព្វថ្ងៃនេះ អនុគមន៍ ដែលយកតែ ពីរចំនួន នេះហើយ ដែលគេប្រើ នៅក្នុង machine électronique ។

4.ប្រូបាប (*Probabilités*).

ទ្រឹស្តីនៃ ប្រូបាប មានដើមកំណើត ពីការសិក្សា នូវល្បែងស៊ីសង ដោយ អ្នកគណិតសាស្ត្រ នៅក្នុងសតវត្សរ៍ ទី *XVII* និង *XVIII* (*Pascal, Fermat, Buffon, Laplace*) ។ សព្វថ្ងៃនេះ ការសំខាន់ របស់ ល្បែងស៊ីសង ត្រូវអន់ថយ ដោយមកពីការសិក្សានូវ ស្ថិតិ (*des études statistiques*)។ គឺដោយការសិក្សានូវស្ថិតិនេះហើយ ដែលចំណោទស្តីពី ប្រូបាប បានត្រូវគេយកមកបង្ហាញ ដោយមាន ភាពងាយស្រួល ហើយក៏ឲ្យនូវ ទ្រឹស្តីបំដូង នៃផ្នែកមុខវិជ្ជានេះ[7]។

---

[7] មានសៀវភៅដែល សិក្សាពី ប្រូបាបដូចជា ៖

Borel, Deltheil et Huron, Probabilités, erreurs. Paris, Armand Colin, 12e éd. 1962
R. TORTRAT, Calcul des probabilités. Paris, 1963.

នៅក្នុងល្បែងស៊ីសង (ខ្នង ឬ មុខ ល្បែងគ្រាប់ ឡុកឡាក់ (jeux de dé) ហូតបៀ រ៉ូឡែត នៅកាស៊ីណូ (roulette des casiaux) ទិន្នន័យ (les données) ត្រូវបានគ្រោងទុកជាមុនថា មានចំនួន ករណីអាច មិនអនន្ត។ ឧបមាដូចជា ល្បែង ខ្នង ឬ មុខ (pile ou face) កាក់ ដែល បោះ ត្រូវ ស្មើទាំងសងខាង ដោយឥតខ្ចោះ ហើយ បង្វិល ឲ្យគ្រប់គ្រាន់ ដើម្បី ពុំអាចដឹងជាមុនថា មុខ ខាងណាដែលនឹងចេញ ហើយវាត្រូវតែរលំ មិនឈរឆ្ងក់ ។ ក៏ដូចគ្នាដែរ កាលណាគេបោះ គ្រាប់ឡុកឡាក់ ដែលមាន មុខ ៦ ត្រូវ មុខទាំង ៦ នោះ ស្មើគ្នាទាំងអស់ គឺថា រវាងមុខទាំង ៦ មុខណា ក៏អាចចេញ ដូចគ្នាទាំងអស់។ ហើយ បើគេ បោះតែម្តង n ឡុកឡាក់ នៅពេលនោះ ចំនួនករណីអាច មាន 6^n ។

នៅក្នុងល្បែងនីមួយៗ មានករណីខ្លះ គេហៅថា ករណី ស្រប ហើយករណីក្រៅពីនោះ ហៅថា ករណី មិនស្រប ។ នៅល្បែង ខ្នងឬ មុខ អ្នកលេង ដែលបានភ្នាល់ 'មុខ' នោះ ទុកជា ត្រូវ កាលណា កាក់រលំ ឃើញ មុខ។

គេហៅថា ប្រូបាបនៃព្រឹត្តការណ៍ស្រប គឺ ប្រភាគ $p = \frac{F}{N}$ ដោយ F ជាចំនួន ករណីស្រប និង N ជាចំនួន ករណី អាច ។ ហើយ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តការណ៍ ផ្ទុយ គឺ ចំនួន $p' = \frac{N-F}{N} = 1 - \frac{F}{N} = 1 - p$ ។

សង្កេត

និយមន័យ ដែលបានកំណត់ខាងលើនេះ ត្រូវធ្វើការសង្កេត ខ្លះដូច តទៅនេះ ៖

1 – តាមគណិតសាស្ត្រ យើងពុំអាចកំណត់ នូវសញ្ញាណ នៃព្រឹត្តការណ៍ប្រហាក់ប្រហែល មិនទៀង បានទេ ។ សញ្ញាញ ទាំងនោះ ទុកដូចជា ការពិភាល់ របស់ម្នាក់ៗ ។ បើយើងចង់បានជាទ្រឹស្តីពិតៗនៃ ប្រូបាបនោះ តាមគណិតសាស្ត្រ នោះយើងត្រូវ បញ្ជាក់ស្វ័យស័ត្យ នៃទ្រឹស្តីនោះ ។

2 – សញ្ញាណ នៃ ករណីស្រប មិនមែនបានដោយ ថាត្រូវតែបែបនេះទេ តែគឺបាន

មកពី និយមន័យ ដូច្នេះ មិនមែន ថា មកពី « មានសំណាង » ឬ « អត់សំណាង » នោះទេ ។ ចំពោះអ្នកគណិតសាស្ត្រ ករណីស្រប គឺ ករណី ដែលគេយកចិត្តទុកដាក់ ទោះបី ជាសុខ ឬ ជាទុក្ខ ក៏ដោយ ។

ម្យ៉ាងទៀត យើងអត់យកចិត្តទុកដាក់ថា ករណីនេះ ស្រប ជាងករណីនោះ ទេ ។ នៅក្នុងការសិក្សាដោយលំអិត សញ្ញាណនៃពិកាល់ ចំពោះ « សេចក្តីសង្ឃឹមថាឈ្នះ» បាននាំមកនូវសញ្ញាណ នៃ « ក្តីសង្ឃឹម គណិតសាស្ត្រ » (espérence mathématique) ។

3 – និយមន័យ ខាងលើនេះ មិនត្រូវទេ កាលណា ព្រឹត្តការណ៍មិនទៀងដែលនិយាយនោះ មាន ករណីអាច ច្រើនរាប់មិនអស់ ដូចជា យើងគូសបន្ទាត់ ស្រប ៗគ្នា នៅលើក្រដាស់មួយសន្លឹក ដោយ ចម្ងាយ ពីបន្ទាត់មួយ ទៅ បន្ទាត់ បន្ទាប់ មានប្រវែងនៅ ដដែល។ បើយើង ទម្លាក់ ម្ជុល មួយ ទៅលើក្រដាស់នោះ នោះយើង ថា មានប្រូបាប ដែលម្ជុលនោះ ជួបនឹង បន្ទាត់ ណាមួយ ហើយ ប្រូបាបនោះ កាន់តែធំ កាលណាម្ជុលនោះ កាន់តែវែង ។ តែ ទីតាំង នៃម្ជុល ដែលអាចមាន ក៏ច្រើន ហើយ ទីតាំងនៃម្ជុល ដែល ជួបនឹងបន្ទាត់ ក៏ច្រើនអនេក ……។

5.សិក្សាពី ការបដិបត្តិ (Etude pratique).

ចំពោះប្រូបាបថ្នាក់ដំបូង ចំណោទមានត្រឹមតែ រកចំនួន ករណីស្រប និង ករណីអាច ហើយ ដើម្បីរក ចម្លើយ ច្រើនតែប្រើ ចំលាស់ (arrangements)ឬ បន្សំ (combinaisons) ។ ឧទាហរណ៍ ដូចជា ៖

5 – 1/ ប្រូបាប ដើម្បីបាន k ដង « ខ្នង » និង $n - k$ ដង « មុខ » កាលណាគេបោះ ប្រាក់កាក់ n ដង ($k \le n$) ។

យើងបានឃើញហើយថា ចំណោទនេះ ត្រឡប់មកជា ចំណោទប្រូបាប ៖ យើងមាន ករណី អាច ស្មើនឹង 2^n ហើយករណីស្រប គឺ ចំនួន ប៉ាទីស្យង់ នៃសំនុំដែលមាន n ធាតុ

មកជា សមនុំដែលមាន k ធាតុ និង សំនុំដែលមាន $n-k$ ធាតុ ។ ដូច្នេះមាន C_n^k ប៉ាទីស្យុង ខុសៗគ្នា ។ ដូច្នេះ ប្រូបាប $p = {C_n^k}/{2^n} = 2^{-n}C_n^k$ ។

សង្កេត

ដោយ ធ្វើឲ្យ k យកចំនួន ពី 0 ទៅដល់ n គេ បានសាកអស់នូវ ករណីអាចៗ ដូច្នេះ យើងឃើញឡើងវិញនូវលទ្ធផល ៖ $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots\ldots + C_n^n$ ។

5 – 2/ ប្រូបាប ដើម្បីបាន អាត់ 4 នៅល្បែង *bridge* ព្រីត ។

អ្នកលេងល្បែងនេះ ត្រូវទទួល បៀ 13 សន្លឹក ក្នុងបៀទាំងអស់ 52 សន្លឹក ។ ដូច្នេះ « ករណីអាច » មានចំនួន C_{52}^{13} (យើងមិនរវល់ នូវបៀ ដែល អ្នកលេងឯទៀតៗបានទទួលទេ) ។ ដូច្នេះ បើអ្នកលេងនេះ បានទទួល អាត់ 4 រួចហើយ គេនៅខ្វះតែ 9 សន្លឹកបៀថែមទៀតទេ ដែលដកចេញពី សំនុំបៀ មាន 48 សន្លឹកៗ

ដូច្នេះ «ករណីស្រប» មានចំនួន C_{48}^9 ។ ដូច្នេះ ប្រូបាប ដើម្បី អ្នកលេងរបស់យើង បាន អាត់ 4 គឺ ៖

$$p = \frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}} = \frac{48!}{9!\times39!} \times \frac{13!\times39!}{52!} = \frac{48!\times13!}{9!\times52!} = \frac{10\times11\times12\times13}{49\times50\times51\times52}$$

ហើយ ចំនួនដេស៊ីមាលដែលប្រហែលខ្វះក្រោម 10^{-4} (*valeur approchée par défaut à moins de* 10^{-4}) គឺ 0,0026 ។

5 – 3/ ប្រូបាប ដើម្បីបាន ផលបូក ស្មើនឹង 6 កាលណាគេ បោះ ឡុកឡាក់ 2 តែម្តង ។

គេអាចបាន 6 ពិន្ទុ ដោយ យក x ពិន្ទុ ចំពោះ ឡុកឡាក់ទី១ និង $6-x$ ពិន្ទុ ចំពោះ ឡុកឡាក់ទី ២ ដោយ ឲ្យ x យកចំនួន ពី 1 ទៅ 5 (ពីព្រោះ ត្រូវ $6-x \geq 1$)។

ដូច្នេះ «ករណីស្រប» មានចំនួន 5 ។ ហើយ «ករណីអាច» មានចំនួន $6 \times 6 = 36$ ។

ដូច្នេះ $p = {5}/{36}$ ។

យើងអាចគូក្រាហ្វិក (*graphique*) ដោយដាក់នៅលើ អក្ស អាប់ស៊ីស នូវចំនួន ពិន្ទុ x ដែលជាផលបូកនៃ ឡុកឡាក់ទាំងពីរ ដែលគេអាចបាន ពី 2 ទៅ 12 (ជាចំនួនគត់) ។ ហើយ ដាក់លើអក្ស័ អរដោនេ នូវ ប្រូបាប y ដើម្បីបាន ពិន្ទុ x ។ នោះ គេនឹងឃើញថា មាន ប្រូបាប ធំជាងគេ ចំពោះ $x = 7$ ហើយ ឆ្លុះ (*symétrie*) ធៀបនឹង បន្ទាត់ $x = 7$ ។ ដោយ «ករណីអាច» នៅដដែល ដើម្បីរក ប្រូបាបចំពោះពិន្ទុ ជាផលបូក នៃ លេខដែលចេញ ចំពោះ ឡុកឡាក់ទាំងពីរ យើងគ្រាន់តែរក «ករណីស្រប» ចំពោះ ផលបូកនីមួយៗ ។ យើងតាង ដោយ x លេខចេញនៃ ឡុកឡាក់ទី១ និង t លេខចេញនៃ ឡុកឡាក់ទី ២ ហើយ s គឺផលបូក គឺថា $s = x + t$ ។ យើងបានតារាងតទៅនេះ ៖

s	x	t	ស្រប		s	x	t	ស្រប		s	x	t	ស្រប		s	x	t	ស្រប
2	1	1	1		6	1	5	5		8	2	6	5		10	4	6	3
3	1	2	2			2	4				3	5				5	5	
	2	1				3	3				4	4				6	4	
4	1	3	3			4	2				5	3			11	5	6	2
	2	2				5	1				6	2				6	5	
	3	1			7	1	6	6		9	3	6	4		12	6	6	1
5	1	4	4			2	5				4	5						
	2	3				3	4				5	4						
	3	2				4	3				6	3						
	4	1				5	2											
						6	1											

នៅលើតារាងនេះ យើងសង្កេតឃើញ ថា ៖

កាលណា s កើនពី **2** ទៅដល់ 7 នោះចំនួនស្រប កើនពី 1 ដល់ 6 ហើយ

កាលណា s កើនពី **7** ទៅដល់ 12 នោះចំនួនស្រប ចុះ ពី 6 ដល់ 1 វិញ ។ ដោយ ប្រូបាប ឡើងឬចុះ តាម ចំនួនស្រប ដូច្នេះ យើងបានឆ្លើយទៅនឹង ការអះអាងថា ប្រូបាប មានចំនួន អតិបរមា ចំពោះ $s = 7$ ។

<u>**5 – 4/** ប្រូបាប មាន ល័ក្ខខ័ណ្ឌ</u> (*axiome des probabilités conditioonnelles*)

<u>ឧទាហរណ៍-1</u>

គេសួរទៅអ្នកធ្វើការ 250 នាក់ គឺ 50 នាក់ជា ក្របខណ្ឌ (**cadres**) ហើយ 200 ជាអ្នកបម្រើ (**employés**) នៅក្នុងសហគ្រាសមួយ ដោយសំនួរថា ៖ តើសុខចិត្ត ធ្វើការក្នុងមួយជាប់រហូត ដល់ម៉ោង ទៅផ្ទះតែម្តង ឬ មួយមាន សម្រាក់នៅពេលបាយថ្ងៃត្រង់ ?

ដល់ពេលគេបើក សន្ទឹកចម្លើយ គេបាន លទ្ធផលដូចតទៅនេះ ៖

ចំពោះ ពួកអ្នកក្របខណ្ឌ បានឆ្លើយ សុខចិត្ត ធ្វើការឥតឈប់ 30 នាក់

ចំពោះ ពួកអ្នកបម្រើ បានឆ្លើយ សុខចិត្ត ធ្វើការឥតឈប់ 80 នាក់ ។

ចំពោះបណ្ណ ចម្លើយ ទាំង 250 បណ្ណ គេរើសយក បណ្ណ មួយដោយចៃដន្យ ។

តើ ប្រូបាប កំណត់ដោយការរើសនេះ មានប៉ុន្មាន នៅលើលំហ ដែលមាន 4 ករណីអាចតាងដោយ ៖ CF CN EF EN ដោយ

CF គឺ ចំនួន អ្នកក្របខណ្ឌ សុខចិត្ត CN គឺ ចំនួន អ្នកក្របខណ្ឌ មិនសុខចិត្ត

EF គឺ ចំនួន អ្នកបម្រើ សុខចិត្ត EN គឺ ចំនួន អ្នកបម្រើ មិនសុខចិត្ត ។

យើងដឹងថា 250 ជម្រើសនេះ គឺមានប្រូបាបស្មើគ្នាទាំងអស់ ជម្រើស 30 បានមកពីចម្លើយ របស់អ្នកក្របខណ្ឌ ដែលសុខចិត្ត ដូច្នេះ

$$p(CF) = \frac{30}{250} = 0{,}12$$

ក៏ដូចគ្នាដែរចំពោះ ជម្រើស ឯទៀតៗ គឺ

$p(CN) = \frac{20}{250} = 0{,}08$ $p(EF) = \frac{8}{250} = 0{,}32$ $p(EN) = \frac{120}{250} = 0{,}48$

បើគេតាងដោយ $\Omega = \{CF, CN, EF, EN\}$ នោះ យើងបាន <u>**លំហប្រូបាប**</u> (*espace probabilisé*) កំណត់ដោយ $\{\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p\}$ ដោយ $\mathcal{P}(\Omega)$ ជាសំនុំនៃផ្នែកទាំងឡាយរបស់ Ω ហើយ p ជា ប្រូបាបនៃផ្នែកទាំងឡាយរបស់ Ω ។

<u>ឧទាហរណ៍-2</u>

យើងយក ឧទាហរណ៍-1 ដដែល តែយើងបន្ថែម នូវ ព្រឹត្តការណ៍ ពីរថែមទៀតៈ

A គឺ បណ្ណដែល រើសបានមក ជាបណ្ណរបស់ អ្នកក្របខណ្ឌ

B គឺ បណ្ណដែល រើសបានមក ជាបណ្ណរបស់ អ្នកដែលសុខចិត្ត ។

ឥឡូវយើងធ្វើការពិសោធន៍ ដូចតទៅនេះ ៖

គេទាញយក បណ្ណ មួយសន្លឹកដោយ ចៃដន្យ គេត្រឡេក មើលទៅឃើញថាជាបណ្ណរបស់ អ្នកក្របខណ្ឌ (ដូច្នេះ ***A*** បានបំពេញហើយ)។

តើ ប្រូបាបដែលថា បណ្ណនោះ ជាបណ្ណ សុខចិត្ត មានប៉ុន្មាន ?

ដោយ ព្រឹត្តការណ៍ A បានសម្រេចហើយ ដូច្នេះ ការហូតនេះ ហាក់បីដូចជា គេហូតក្នុងចំណោម អ្នកក្របខណ្ឌទាំង 50 នាក់ ។ ហើយដោយ ក្នុងចំណោមនោះ 30 នាក់ សុខចិត្ត ដូច្នេះ ប្រូបាបដែលយើងរកគឺ $\frac{30}{50} = 0{,}6$ ។

ប្រូបាបនេះ គេហៅថា « ប្រូបាបរបស់ B កាលណា ***A*** បំពេញរួចហើយ» ឬ គេនិយាយដោយខ្លី « ប្រូបាបរបស់ B បើ A » $(probabilité\ de\ B\ si\ A)$ ហើយគេសរសេរ ៖ $p(B/A)$ ។

យើងសង្កេតឃើញថា ៖ $p(A) = \frac{50}{250} = 0{,}2$ $p(A \cap B) = \frac{30}{250} = 0{,}12$ ។ គេឃើញថា $p(B/A) = \frac{0{,}12}{0{,}2}$ ។

ដូច្នេះ នៅក្នុង ឧទាហរណ៍នេះ $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$ ។

តទៅនេះ យើងនឹង បង្ហាញថា រូបមន្តនេះ ជាទូទៅ ។ ចូរសង្កេតថា ៖ គ្រាន់តែដឹងថាព្រឹត្តការណ៍ A បំពេញហើយ នោះប្រូបាបនៃ « បណ្ណដែលទាញចេញមក ជាបណ្ណ របស់ អ្នកក្របខណ្ឌដែល សុខចិត្ត » បានឡើងពីចំនួន $\mathbf{0{,}12}$ ទៅដល់ចំនួន $\mathbf{0{,}6}$ ។

<u>**5-4-1/** ប្រូបាប មានលក្ខខណ្ឌ - និយមន័យ</u>

<u>ទ្រឹស្តីបទ</u>

បើ A ជាព្រឹត្តការណ៍មួយ ដែលមាន ប្រូបាប មិនសូន្យ នៅក្នុង លំហប្រូបាប មិនអនន្ត $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ នៅពេលនោះ ការអនុវត្តន៍ f_A ពី $\mathcal{P}(\Omega)$ ទៅ R_+ កំណត់ដោយ ៖ $\forall X \in \mathcal{P}(\Omega)$, $f_A(X) = \frac{p(X\cap A)}{p(A)}$ ជា ប្រូបាប មួយ លើ Ω ។

នេះបានន័យថា $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), f_A)$ ជា លំហ ប្រូបាប មួយថ្មីទៀត។ ហើយគេ ហៅ ម្យ៉ាងទៀតថា f_A ជា ប្រូបាបជាប់លក្ខខណ្ឌនឹង A លើ Ω ។

<u>បង្ហាញ</u>

ដើម្បីថា f_A ជាប្រូបាបលើ Ω ដោយ ស្វ័យស័ត្យ ពីនិយមន័យនៃប្រូបាប ត្រូវ

1/ $f_A(\Omega) = 1$

ដោយ $f_A(X) = \frac{p(X\cap A)}{p(A)}$ => $f_A(\Omega) = \frac{p(\Omega\cap A)}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$

2/ *ស្វ័យស័ត្យ ប្រូបាបទាំងអស់* (*Axiome des probabilités totales*)

គេតាងដោយ X និង Y ព្រឹត្តការណ៍ ពីរ មិនស្របគ្នា (*2 évènements incompatibles*)

គឺថា $X \cap Y = \emptyset$ ។ ឥឡូវយើងរក f_A $(X\cup Y)$

ដោយ $f_A(X) = \frac{p(X\cap A)}{p(A)}$ => *ដោយ* $f_A(X\cup Y) = \frac{p[(X\cup Y)\cap A)]}{p(A)}$

ដោយបំបែក $\cap$ ធៀបទៅនឹង $\cup$ => $(X \cup Y) \cap A = (X \cap A) \cup (Y \cap A)$

ដូច្នេះ $f_A(X\cup Y) = \frac{p[(X\cap A) \cup(Y \cap A)]}{p(A)}$

ដោយ $X \cap Y = \emptyset$ => $(X \cap A) \cap (Y \cap A) = \emptyset$ *ដូច្នេះ ព្រឹត្តការណ៍* $(X \cap A)$ *និង* $(Y \cap A)$ *ទាំងពីរនេះ មិនស្របគ្នាទេ។ ដូច្នេះ តាម ស្វ័យស័ត្យ ប្រូបាបទាំងអស់ អនុវត្ត ទៅលើ p យើងបាន* $p[(X \cap A) \cup (Y \cap A)] = p(X \cap A) + p(Y \cap A)$

ដូច្នេះ $f_A(X\cup Y) = \frac{p(X\cap A)}{p(A)} + \frac{p(Y\cap A)}{p(A)}$

ហើយនៅចុងបញ្ចប់ យើងបាន ៖ $f_A(X \cup Y) = f_A(X) + f_A(Y)$ *ដែលយើងចង់បង្ហាញ ។*

សង្កេត

ដោយទ្រឹស្តីបទខាងលើនេះ កាលណាគេឲ្យ លំហប្រូបាប (មិនអនន្ត) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ មួយ នោះការជ្រើសយកព្រឹត្តការណ៍ណាមួយដែលមាន ប្រូបាបមិនសូន្យ នៅក្នុងលំហនោះ អាចឲ្យយើងបង្កើតបានលំហថ្មីមួយទៀត ដោយប្រើរបៀបខាងលើនេះ ។ ហើយប្រូបាប $f_A(X)$ គឺជា ប្រូបាបនៃព្រឹត្តការណ៍ X ដោយដឹងថាព្រឹត្តការណ៍ A បានសម្រេចជាមុនរួចហើយ ។

5-4-2/ ស្វ័យស័ត្យនៃប្រូបាប មានលក្ខខណ្ឌ - Axiome des probabilités conditionnelles.

បើ A ជាព្រឹត្តការណ៍ មានប្រូបាបមិនសូន្យ នៅក្នុងលំហប្រូបាប (មិនអនន្ត) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ នោះ ប្រូបាបនៃ ព្រឹត្តការណ៍ E កាលណាដឹងថា A បានសម្រេចហើយ គឺ ស្មើនឹង $\frac{p(E\cap A)}{p(A)}$ ។

តាមនិយមន័យ ប្រូបាបនោះ ហៅថា ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃ E បើ A សម្រេច ។

គេសរសេរ $p(E/A)$ មើលថា ប្រូបាប E បើ A ។

សង្កេត

ស្វ័យស័ត្យ នៃប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ នេះ អាច សរសេរជា ៖

$$\boldsymbol{p(A\cap E) = p(A)\times p(E/A)}$$

សរសេរដោយបែបនេះ យើងអាចគណនានូវ ប្រូបាប $p(A\cap E)$ បាន ដែលគេ ពេលខ្លះថាជា **ស្វ័យស័ត្យ នៃប្រូបាបផ្សំជាតុ** (*Axiome des probabiltés composées*) ។

ដោយ $A\cap E = E\cap A$ នោះគេអាចសរសេរ :

$$p(A\cap E) = p(A).p(E/A) = p(E).p(A/E) \quad ។$$

ឧទាហរណ៍ ៖

នៅក្នុងល្បែង បៀមាន 32 សន្លឹក គេហូត 2 សន្លឹកម្តងៗ តើ ប្រូបាប ដើម្បី បៀទាំងពីរ សន្លឹកនោះ ជា អាត់ (as) មានប៉ុន្មាន ? (អាត់ ទាំងអស់មាន 4) ។

យើង កំណត់ ព្រឹត្តការណ៍ មាន ពីរ គឺ ៖

A : បៀសន្លឹកទី ១ គឺ អាត់

B : បៀសន្លឹកទី ២ គឺ អាត់[8]។

ដូច្នេះ $p(A) = \frac{4}{32}$ ៖ បៀសន្លឹកទី ១ ដែលហូត គឺ អាត់ ដូច្នេះ បៀនៅសល់ សម្រាប់ ហូត សន្លឹកទី ២ គឺ សល់ អាត់ 3 ក្នុងបៀនៅសល់ 31 សន្លឹក

=> $p(B/A) = \frac{3}{31}$ ។

ហើយដោយ ស្វ័យសត្យប្រូបាបផ្សំជាតុ យើងបាន $p(B \cap A) = \frac{4}{32} \times \frac{3}{31}$ ។

បើយើង រក $p(A \cap B)$ ដោយត្រង់តែម្តង ក៏បានដែរ ហើយលទ្ធផលស្មើគ្នា៖

$A \cap B$: បៀដែលហូតម្តង ២ សន្លឹកនោះ គឺ អាត់ពីរ ។ ដូច្នេះ

ករណី ស្រប $= C_4^2$ ករណី អាច C_{32}^2 => $p(A \cap B) = \frac{C_4^2}{C_{32}^2} = \frac{4!}{2!\times 2!} \div \frac{32!}{2!\times 30!}$

ឬ $p(A \cap B) = \frac{4!}{2!\times 2!} \times \frac{2!\times 30!}{32!} = \frac{3\times 4}{31\times 32} = \frac{4}{32} \times \frac{3}{31}$ ដែលដូចលទ្ធផលខាងលើ ។

5-4-3/ព្រឹត្តការណ៍ មិនទាក់ទងគ្នា នៅប្រូបាប (*Indépendance en probabilité*).

A/ ករណី ព្រឹត្តការណ៍ពីរ

[8] បៀគេហូតពីរ សន្លឹកមែន តែ គេ អ៊ុត (ម្តងមួយសន្លឹក)ៗ ។ បើគេ អ៊ុត សន្លឹកទី១ គេឃើញ អាត់ នោះ ដល់គេអ៊ុតសន្លឹកទី២ នោះ គេសង្ឃឹម បាន អាត់ មួយថែមទៀត ដោយ ប្រូបាប $p(B/A)$ ។

គេឲ្យ លំហប្រូបាប $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ ។ គេតាងដោយ A និង B ព្រឹត្តការណ៍ ពីរ ដែល មានប្រូបាបមិនសូន្យ ។ គេអាចមាន ការប្រព្រឹត្តទៅនៃ ព្រឹត្តការណ៍ A មិនជាប់ ទាក់ទង នឹង ប្រូបាប នៃការប្រព្រឹត្តទៅ នៃព្រឹត្តការណ៍ B ។ នៅពេលនោះ គេថា នៅក្នុង លំហប្រូបាបនេះ ព្រឹត្តការណ៍ B មិនទាក់ទងនឹង[9] ព្រឹត្តការណ៍ A ។

នេះបានន័យថា $\boxed{p(B/A) = p(B)}$ [10]

ឬ មួយ $p(B) = p(B/A) = \frac{p(B\cap A)}{p(A)}$ => $\boxed{p(B)\times p(A) = p(B\cap A) \quad \text{(R1)}}$

ដោយ តាមនិយមន័យ $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)\times p(B)}{p(B)} = p(A)$ ដូច្នេះ

$p(A/B) = p(A)$ => ព្រឹត្តការណ៍ A មិនជាប់ទាក់ទង នឹង ព្រឹត្តការណ៍ B ។

រួមសេចក្តីទៅ បើព្រឹត្តការណ៍ B មិនជាប់ទាក់ទង នឹង ព្រឹត្តការណ៍ A នោះ ព្រឹត្តការ A ក៏ មិនជាប់ទាក់ទងនឹង ព្រឹត្តការណ៍ B ដែរ ហើយគេនិយាយថា ៖

« ព្រឹត្តការណ៍ A និង B មិនជាប់ទាក់ទង ក្នុង ប្រូបាប » (*les évènements A et B sont indépendants en probabilité.*)។

និយមន័យ

ក្នុង លំហប្រូបាប (មិនអនន្ត) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ ព្រឹត្តការណ៍ពីរ A និង B មិនជាប់ទាក់ទង នឹងគ្នា នោះ ត្រូវតែ និងគ្រាន់នៅតែ $p(A\cap B) = p(A).p(B)$ ។

គេអាចសរសេរ ៖

$\boxed{A \text{ និង } B \text{ មិនជាប់ទាក់ទង នឹងគ្នា} \iff p(A\cap B) = p(A).p(B)}$

[9] ពីព្រោះ ប្រូបាប នៃព្រឹត្តការណ៍ B នៅដដែល មិនផ្លាស់ប្តូរ ទៅតាម ព្រឹត្តការណ៍ A ។

[10] $p(B/A)$ មើលថា ប្រូបាប B បើ A ដូច្នេះបើមិនទាក់ទងនឹងA នោះទៅជា ប្រូបាប B គឺ $p(B)$។

ឧទាហរណ៍

យើងត្រឡប់មក ឧទាហរណ៍-1 នៃ 5- 4°/ ប្រូបាប មាន ល័ក្ខខ័ណ្ឌ និងព្រឹត្តការណ៍

A : បណ្ណ ដែលចាប់បានមក គឺ បណ្ណ អ្នក ក្របខណ្ឌ

B : បណ្ណ ដែលចាប់បានមក គឺ បណ្ណ អ្នក សុខចិត្ត

ព្រឹត្តការណ៍ ទាំងពីរនេះ វាជាប់ទាក់ទងនឹងគ្នា ពីព្រោះ៖

$p(B) = \frac{110}{250}$ ហើយ $p(B/A) = \frac{30}{50}$ ដូច្នេះ $p(B) \neq p(B/A) = \frac{150}{250}$

តើត្រូវ មាន អ្នកបម្រើ សុខចិត្ត ប៉ុន្មាននាក់ ដើម្បី ឲ្យព្រឹត្តការណ៍ ទាំងពីរនេះ មិនជាប់ទាក់ទងនឹងគ្នា ?

យើងតាងដោយ b ចំនួននៃករណីដែលស្របនឹងព្រឹត្តការណ៍ B ។ ដើម្បី A និង **B** មិនជាប់ទាក់ទងនឹងគ្នា លុះត្រាតែ $p(B) = \frac{150}{250}$ => $b = 150$ (R2)

ដោយ b ជាចំនួន អ្នកសុខចិត្តទាំងអស់ គឺជា អ្នកក្របខណ្ឌ និង អ្នកបម្រើ នោះយើងតាងដោយ n ចំនួន អ្នកបម្រើ សុខចិត្ត ដែលត្រូវរក ។ ដោយចំនួន អ្នកក្របខណ្ឌ ដែលសុខចិត្ត នៅដដែល គឺ 30 នាក់ ដូច្នេះ $b = 30 + n$ ។

ដោយ (R2) $b = 150$ ដូច្នេះ $30 + n = 150$ => $n = 150 - 30 = 120$ ។

ចម្លើយគឺ ៖ ដើម្បីឲ្យ A និង B មិនជាប់ទាក់ទងនឹងគ្នា នោះលុះត្រាតែ ចំនួន អ្នកបម្រើដែលសុខចិត្ត មាន 120 នាក់ ៕

B/ ករណី ដែលលើសពី 2 ព្រឹត្តការណ៍ឡើងទៅ

នៅពេលណា មាន ព្រឹត្តការណ៍ច្រើន គេថាព្រឹត្តការណ៍ទាំងនោះ មិនជាប់ទាក់ទងនឹងគ្នា បើកាលណា គ្រប់ការប្រសព្វ (intersection) ដែលអាចធ្វើបាននៃ ព្រឹត្តការណ៍ ទាំងនោះ មានប្រូបាបស្មើនឹង ផលគុណ នៃប្រូបាប របស់ព្រឹត្តការណ៍ដែលប្រសព្វគ្នានោះ ។

ឧទាហរណ៍.

ចំពោះ បីព្រឹត្តការណ៍ A B នឹង C មិនជាប់ទាក់ទងនឹងគ្នា បើ៖

$p(A\cap B) = p(A).p(B)$ $p(B\cap C) = p(B).p(C)$ $p(C\cap A) = p(C).p(A)$

$p(A\cap B\cap C) = p(A).p(B).p(C)$ ។

5 – 5/ វ៉ារីយ៉ាប មិនទៀង (variable aléatoire).

យើងធ្លាប់បានឃើញ លំហប្រូបាប $(\Omega 1, \mathcal{P}(\Omega 1), p_1)$ ដោយ $\mathcal{P}(\Omega 1)$ ជាព្រឹត្តការណ៍ ផ្សេងៗ នៃ $\Omega 1$ ហើយ $\mathbf{p_1}$ ជា ប្រូបាប នៃព្រឹត្តការណ៍នោះ ។

ឥឡូវនេះ គេចង់ផ្គូផ្គង ព្រឹត្តការណ៍នៅក្នុង $\mathbf{\Omega 1}$ ទៅនឹង <u>ចំនួនពិតនៅក្នុង **R**</u> ដោយ ប្រើ <u>ការអនុវត្តន៍</u> មួយ ហៅថា វ៉ារីយ៉ាប មិនទៀង (*Variable aléatoire*)។ ហើយ ដោយ ការ អនុវត្តន៍ នោះ គេបាន លំហប្រូបាបថ្មីមួយគឺ $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ ។ ដោយ ចំនួន នៅក្នុង Ω មានទំនាក់ទំនង នឹងព្រឹត្តការណ៍នៅក្នុង $\Omega 1$ ដូច្នេះ ប្រូបាប $\mathbf{p}$ ក៏មានទំនាក់ទំនងនឹង ប្រូបាប $\mathbf{p_1}$ ដែរ ។

<u>ឧទាហរណ៍ នៃ វ៉ារីយ៉ាប មិនទៀង</u>

ក្នុងល្បែង បោះប្រាក់កាក់ ដល់ប្រាក់កាក់ជ្រុះ មកវិញ នោះ អាចជ្រុះបង្ហាញខាង ខ្នង (**P**) ឬ បង្ហាញខាង មុខ (**F**) ។

ឥឡូវនេះ យើងបង្រើក ការពិសោធន៍នេះ ដោយ បោះប្រាក់កាស់ បី ដង ជាប់ៗគ្នា ។ តើ ប្រូបាប ចេញ **F** សូន្យ ដង មាន ប៉ុន្មាន ? ហើយ ប្រូបាប ចេញ **F** មួយដង មាន ប៉ុន្មាន ? ប្រូបាប ចេញ **F** ពីរ ដង មាន ប៉ុន្មាន ?ប្រូបាប ចេញ **F** បី ដង មាន ប៉ុន្មាន ? ៕

នៅក្នុង ឧទាហរណ៍នេះ ៖

លំហប្រូបាប $(\Omega 1, \mathcal{P}(\Omega 1), p_1)$ មាន

$$\Omega 1 = \{\text{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF}\} \quad (1)$$

ដូច្នេះ ធាតុមួយៗ នៃ $\Omega 1$ **មាន ប្រូបាប** $\frac{1}{8}$ ។ ហើយចំពោះធាតុទាំងនោះ មាន ធាតុ

PPP ដែលគ្មាន អក្សរ F និងជាតុ ***PPF*** ដែលមាន អក្សរ ***F*** មួយដង...និងជាតុ ផ្សេងៗ ទៀត ដែលមាន អក្សរ ***F*** រហូតដល់បីដង ។ ដូច្នេះ យើង អាចកំណត់ Ω ដោយ Ω = { 0, 1, 2 , 3 } ហើយ <u>វ៉ារីយ៉ាប មិនទៀង ***X***</u> (*variable aléatoire*) គឺ <u>ការអនុវត្តន៍</u> ពី Ω1 ទៅ Ω ។ ចំពោះ ប្រូបាប $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ គឺ កំណត់ទៅតាមចំនួន ព្រឹត្តការណ៍ក្នុង **Ω1** ដែលឲ្យជា ចំនួន នៅក្នុង **Ω** ។ ដូចនៅក្នុង ឧទាហរណ៍នេះ

-ព្រឹត្តការណ៍ ក្នុង **Ω1** ដែលឲ្យ ចំនួន 0 គឺ PPP ដូច្នេះ មានតែ មួយ => $p(0) = \frac{1}{8}$

-ព្រឹត្តការណ៍ក្នុង **Ω1** ដែលឲ្យ ចំនួន 1 គឺ PPF, PFP, FPP ដូច្នេះ មាន បី => $p(1) = \frac{3}{8}$

-ព្រឹត្តការណ៍ក្នុង **Ω1** ដែលឲ្យ ចំនួន 2 គឺ PFF, FPF, FFP ដូច្នេះ មាន បី => $p(2) = \frac{3}{8}$

-ព្រឹត្តការណ៍ក្នុង **Ω1** ដែលឲ្យ ចំនួន 3 គឺ FFF ដូច្នេះ មាន មួយ => $p(3) = \frac{1}{8}$ ។

ដូច្នេះ ដោយ <u>វ៉ារីយ៉ាប មិនទៀង ***X***</u> (*variable aléatoire*) គេបាន លំហប្រូបាបថ្មី គឺ $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ ។

<u>និយមន័យ</u>

1-បើ $(\Omega 1, \mathcal{P}(\Omega 1), p_1)$ **ជាលំហប្រូបាបមានព្រំដែន** (*espace probabilisé fini*) **គេ ហៅថា វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង ដាច់ៗពីគ្នា** (*variable aléatoire discrète*) **គ្រប់ ការអនុវត្តន៍ ពី** Ω1 **ទៅ សំនុំ** *R* **នៃនំនួនពិត ។**

2- **គេថា វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង កំណត់ លើ** Ω1 (**សកលជាខាងដើម** - *univers initial*)

3- **សំនុំ នៃចំនួន ដែលបានមកពី វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង សំនុំនោះហៅថា សកលរូបភាព** (*univers – image*) ។

4- ជាទូទៅ គេតាង វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង ដោយ X

5- បើ x ជាចំនួនមួយនៃ សកលរូបភាព នោះព្រឹត្តការណ៍ $A_1 \in \Omega 1$ ដែលផ្គូផ្គង និង x ព្រឹត្តការណ៍ A_1 នោះគេហៅថា រូបភាព ច្រាស នៃ x ដោយ X

គឺថា $A_1 = X^{-1}(x)$ ។

សង្កេត

-ដោយ Ω1 មានចំនួនកំណត់ ដូច្នេះ សកលរូបភាព Ω ក៏មានចំនួនកំណត់ដែរ ។

ហើយ បើវាមាន **n** ជាតុ នោះគេតាង $\Omega = \left\{ x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \right\}$ ។ ជាទូទៅ

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ត្រូវតម្រៀប តាមលំដាប់ ឡើង តាមចំនួន (**ordre croissant**) ៖

$x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n$

-បើ x_1 និង x_2 ជាពីរ ចំនួន ខុសគ្នានៃ សកលរូបភាព នោះ ព្រឹត្តការណ៍ ក្នុង **Ω1** ជាគូជាមួយ ក៏ មិនស្របនឹងគ្នាដែរ ។ ពីព្រោះថា បើ A_m និង A_n ជាព្រឹត្តការណ៍ទាំងពីរនោះ ហើយបើ $A_m \cap A_n \neq \emptyset$ នោះជាតុទាំងឡាយនៃ $A_m \cap A_n$ ត្រូវមាន (ដោយ **X**) រូបភាព x_1 ផង និង x_2 ផង (បានន័យថា ព្រិត្តការណ៍តែមួយ មានរូបភាពដល់ទៅ ២) ដែលខុសពី សម្មតិកម្ម $x_1 \neq x_2$ ។

សង្កេត

ឧមមា ថានៅក្នុង ពោងបុណ្យ មួយ មាន មនុស្ស ចែក ជា បី ពួក ៖

1-ពួក ទីមួយ គឺ កូនក្មេង ប្រុសនិងស្រី លាយគ្នា ដោយមានអាយុ យ៉ាងច្រើន ១៦ ឆ្នាំ ហើយ ទាំងអស់ មានចំនួន 40 នាក់ ។

2-ពួក ទីពីរ គឺ មនុស្ស ប្រុស មានអាយុ លើពី ១៦ ឆ្នាំ ឡើងទៅ ហើយ ទាំងអស់ មានចំនួន 60 នាក់ ។

3-ពួក ទីបី គឺ មនុស្ស ប្រុស មានអាយុ លើពី ១៦ ឆ្នាំ ឡើងទៅ ហើយ ទាំងអស់ មាន ចំនួន 50 នាក់ ។

ដោយ មនុស្សទាំងអស់មាន 150នាក់ ហើយម្នាក់ៗ មានលេខប្រចាំខ្លួន រៀងៗខ្លួន ដូច្នេះ យើង សន្មត ឲ្យលេខ ពី 1 ទៅ 40 ចំពោះក្មេងៗ ។ ពី 41 ទៅ 100 ចំពោះ មនុស្ស ចាស់ប្រុស ។ និងពី 101 ទៅ 150 ចំពោះ មនុស្សចាស់ ស្រី ។ គេដាក់លេខទាំងអស់ ក្នុង ធុង ហើយ គេចាប់ យកលេខណាមួយ ពីក្នុងធុង ។ ឥឡូវ គេឲ្យយើង កំណត់ លំហប្រូបាប ទាំងពីរ គឺ ៖ $(\Omega 1, \mathcal{P}(\Omega 1), p_1)$ ដោយ Ω1 ជា សកលជាខាងដើម និងលំហប្រូបាប $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ បានមកដោយ វ៉ារីយ៉ាប មិនទៀង **X** ហើយ **Ω** ជា សកលរូបភាព ។

ដូច្នេះ Ω1 = សំនុំមនុស្សទាំងអស់នៅក្នុងពេងបុណ្យ ដែលអាចចែកជាបីក្រុម ដាច់ពីគ្នា៖

E : សំនុំ កូនក្មេង

H : សំនុំ មនុស្សចាស់ ប្រុស

F : សំនុំ មនុស្សចាស់ ស្រី

$\mathcal{P}(\Omega 1) = \{\mathrm{E}, \mathrm{H}, \mathrm{F}\}$

$p1$ គឺប្រូបាប នៃការ ទាញ យក សន្លឹកលេខណាមួយ ដូច្នេះ $p1 = \frac{1}{150}$ ។

*

*

យើង កំណត់ វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង $X : \Omega 1 \longrightarrow R$

$$E \rightarrow x_1 = 1$$

$$H \rightarrow x_2 = 2$$

$$F \rightarrow x_3 = 3$$

-ចំនួន 1 គឺជាតម្លៃ ដែល វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង **X** ឲ្យទៅព្រឹត្តករណ៍ «ទាញបានលេខ កូនក្មេង »

-ចំនួន 2 គឺជាតម្លៃ ដែល វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង X ឲ្យទៅព្រឹត្តករណ៍ «ទាញបានលេខ មនុស្សចាស់ប្រុស»

-ចំនួន 3 គឺជាតម្លៃ ដែល វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង X ឲ្យទៅព្រឹត្តិករណ៍ «ទាញបានលេខ មនុស្សចាស់ស្រី» ។

ដូច្នេះ $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ កំណត់ ដោយ៖

$\Omega = \{1, 2, 3\}$; $\mathcal{P}(\Omega) = \left\{ \{1\}, \{2\}, \{3\} \right\}$

$p(1) = \frac{40}{150}$; $p(2) = \frac{60}{150}$; $p(3) = \frac{50}{150}$ ។

យើង ឃើញថា ដើម្បីបាន ប្រូបាប $p(2) = \frac{60}{150}$ របស់ លំហា Ω ក៏យើង ប្រើ ប្រូបាប $p1$ នៃ $\Omega1$ ដែរ ។ ដូច្នេះ ប្រូបាប p ចេញមកពី ប្រូបាប $p1$ មិនមែនដាច់ពីគ្នានោះទេ ។

យើងឃើញថា X អាចយក ចំនួន 1 ឬ 2 ឬ 3 ដូច្នេះ ចំពោះប្រូបាប

$p(X < 3)$ មានន័យដូចម្តេច ?

ដោយ $X < 3$ ដូច្នេះ X អាច យក ចំនួន 1 ឬ 2 គឺ $X = 1$ ឬ $X = 2$ ។ ដូច្នេះ $p(X < 3)$

គឺ $p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{40}{150} + \frac{60}{150} = \frac{100}{150} = \frac{2}{3}$

$p(X < 3) = \frac{2}{3}$ ។ បើ យើងបកស្រាយ ជាព្រឹត្តិការណ៍ ចំពោះ $p(X < 3)$ នោះគឺជាប្រូបាប នៃ លេខដែលចេញ គឺ ជា លេខរបស់ក្មេង ឬ ជាលេខរបស់ មនុស្សចាស់ ប្រុស ។

================================ចប់សង្កេត========================

- បើយើង មើលឡើងវិញ នូវឧទាហរណ៍ ដែលគេបោះ ប្រាក់កាក់ 3ដង ជាប់គ្នា ហើយមួយលើកៗ គេរាប់ចំនួនផ្កា F ដែលចេញ នោះយើងឃើញថា មានលំហប្រូបាប $(\Omega1, \mathcal{P}(\Omega1), p_1)$ ហើយនិង លំហប្រូបាប $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ បានមកដោយ វ៉ារីយ៉ាបមិន X ។ តើទំនាក់ ទំនង រវាង ព្រឹត្តការណ៍ នៅក្នុង $\Omega1$ (សកល ជាខាងដើម) និងនៅក្នុង Ω

(សកលរូបភាព) មានរបៀបណា? បើយើងតាង ដោយ A_1 ព្រឹត្តការណ៍ នៃ **Ω1** និង ***A*** ព្រឹត្តការណ៍ជាដៃគូ នៃ **Ω** នោះតាមនិយមន័យ នៃ ***X*** យើងបាន ៖

$A_1 = \left\{ \omega;\ \omega \in \Omega 1 \quad \text{និង } X(\omega) \in A \right\}$ ហើយ $p(A) = \ p_1(A1)$ ។ ចូរមើល តារាង ខាងក្រោមនេះ ៖

$\Omega 1 = \{\text{PPP, PPF, PFP, PFF PPF, PFP, FPF, FFP, FFF}\}$ => ចំនួនករណី អាច = 8

ពីព្រោះ $\{P,F\} \times \{P,F\} \times \{P,F\} = \{P,F\}^3 = \Omega 1$ ។

ហើយនៅក្នុង **Ω1** ដដែល ព្រឹត្តការណ៍ ផ្កា (F) មាន 0 ដង គឺ PPP ។ ព្រឹត្តការណ៍ ផ្កា (F) មាន 1 ដង គឺ PPF, PFP, FPP ។ ព្រឹត្តការណ៍ ផ្កា (F) មាន 2 ដង គឺ PFF, FPF, FFP ។ ព្រឹត្តការណ៍ ផ្កា (***F***) មាន 3 ដង គឺ FFF ។

ចំនួនករណី ស្រប មាន ៖ 1 ចំពោះ ព្រឹត្តការណ៍ផ្កា (F) មាន 0 ដង => $p(x=0) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$

ចំនួនករណី ស្រប មាន ៖ **3** ចំពោះ ព្រឹត្តការណ៍ផ្កា (F) មាន 1 ដង => $p(x=1) = \frac{3}{8}$

ចំនួនករណី ស្រប មាន ៖ 3 ចំពោះ ព្រឹត្តការណ៍ផ្កា (F) មាន **2** ដង => $p(x=2) = \frac{3}{8}$

ចំនួនករណី អាច មាន ៖ 1 ចំពោះ ព្រឹត្តការណ៍ផ្កា (***F***) មាន 3 ដង => $p(x=3) = \frac{1}{8}$

$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$; $\mathbf{\Omega 1} \xrightarrow{X} \Omega$ (នៅក្នុង R)

*

*

*

*

*

*

*

$N°$	Ω1	X => Ω →	$\Omega 1 = X^{-1}(\Omega)$	ចំនួនករណីស្រប	$p(x = *)$
1	PPP	0	PPP	1	p (x = 0) = 1/8
2	PPF	1	PPF	3 (F មួយដង)	p (x =1) = 3/8
3	PFP		PFP		
4	PFF		FPP		
5	FPP	2	PFF	3 (F ពីរដង)	P (x =2) = 3/8
6	FPF		FPF		
7	FFP		FFP		
8	FFF	3	FFF	1	p (x =3) = 1/8

ដោយតារាងនេះ យើងសង្កេតឃើញថា វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង គឺ មាន មុខងារ ប្រមូល ព្រឹត្តការណ៍នៃ **Ω1** ជាក្រុមៗ ទៅតាម <u>ករណីអាច</u> ដែលជាលក្ខ័ណ្ឌនៅក្នុង ចំណោទ ប្រូបាប ។ ហើយ ក្រុមនីមួយៗ ដែលជាព្រឹត្តការណ៍ សម្តែងដោយពាក្យសំដីធម្មតា ក៏ក្លាយទៅជា ចំនួនទៅវិញ ដើម្បីនឹងអាច គណនា ទៅតាម គណិតសាស្ត្រ ។ ដូចជានៅ ក្នុង ឧទាហរណ៍នេះ មាន 4 ក្រុម ហើយ ក្រុមនីមួយៗ មានលេខរៀង 0, 1, 2, 3 ដែលឲ្យ ដោយ វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង។

សង្កេត

ការយល់ច្បាស់នូវ វ៉ារីយ៉ាប មិនទៀងនេះ សំខាន់ណាស់ នៅក្នុង ប្រូបាប ។ ពីព្រោះ ក្នុង អនុគមន៍ ប្រូបាប ទាំងឡាយ (*loi ou distribution de probaboilité*) សុទ្ធតែត្រូវការ វ៉ារីយ៉ាប មិនទៀងនេះ ជានិច្ច ដើម្បីនឹង ថ្លែងនូវ អនុគមន៍នោះៗ អនុគមន៍ ដែលជា ច្បាប់ប្រូបាប នៅក្នុង ឧទាហរណ៍នេះគឺ ៖ $0 \rightarrow \frac{1}{8}$; $1 \rightarrow \frac{3}{8}$; $2 \rightarrow \frac{3}{8}$; $3 \rightarrow \frac{1}{8}$ ។

ឧទាហរណ៍ មួយទៀត

យើងធ្លាប់ដឹងថា បៀ មួយហ៊ូ មាន 52សន្លឹក ហើយ ក្នុង 52 សន្លឹកនោះ មាន ៖

1/ 36 សន្លឹក ជា បៀគ្រាប់ គេឲ្យតម្លៃវា 0

2/ 4 សន្លឹក ជាបៀ រូបប្រុស (valet) គេឲ្យតម្លៃវា 1

3/ 4 សន្លឹក ជាបៀ រូបស្រី (dame) គេឲ្យតម្លៃវា 2

4/ 4 សន្លឹក ជាបៀ រូបស្ដេច (roi) គេឲ្យតម្លៃវា 3

5/ 4 សន្លឹក ជាបៀ រូបអាត់ (as)គេឲ្យតម្លៃវា 4 ។

ឥឡូវនេះ គេហូត បៀ 1 សន្លឹក ពីក្នុងហ៊ូដែលមាន 52 សន្លឹកនេះ ។ តើប្រូបាប ដែលបានបៀ ក្នុងក្រុមនីមួយៗ មានប៉ុន្មាន ?

ដោយសន្មតថា លំហ $\Omega 1$ មានប្រូបាប សមភាព (équiprobable) ដូច្នេះ ព្រឹត្តការណ៍នីមួយៗ នៅក្នុង $\Omega 1$ មានប្រូបាបស្មើនឹង $\frac{1}{52}$ ។ ហើយយើងអាចយក លំហ Ω នៃវ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង ដោយ $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ដោយកំណត់ ថា

0 : ជាព្រឹត្តការណ៍ ដែលផ្ទុនឹងព្រឹត្តការក្នុង $\Omega 1$: « បៀដែលហូត មានតម្លៃ 0 » ដូច្នេះ

$p(X = 0) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$

1 : ជាព្រឹត្តការណ៍ ដែលផ្ទុនឹងព្រឹត្តការក្នុង $\Omega 1$: « បៀដែលហូត មានតម្លៃ 1 » ដូច្នេះ

$p(X = 1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ។ ហើយក៏ដូច ព្រឹត្តការណ៍ ឯទៀតៗ ហើយយើងបានច្បាប់នៃប្រូបាបក្នុង Ω នេះគឺ ៖ $\left\{(0,\frac{9}{13}),\ (1,\frac{1}{13}),\ (2,\frac{1}{13}),\ (3,\frac{1}{13}),\ (4,\frac{1}{13})\right\}$ ។

តទៅនេះ ជានិយមន័យ ៖

<u>និយមន័យ</u> (ស្ដីពី ប្រូបាបរូភាព)

គេឲ្យ $(\Omega 1, \mathcal{P}(\Omega 1), p_1)$ លំហប្រូបាប មានកំណត់ (*espace probabilisé fini*)។

X ជា វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង ដាច់ៗពីគ្នា (*variable aléatoire dicrète*) កំណត់

ពី $\Omega 1$ ទៅ Ω (សកលរូបភាព)។ គេហៅថា <u>ប្រូបាបរូភាព</u> (**probabilit**é – **image**) គឺ ការអនុវត្តន៍ ពី $\mathcal{P}(\Omega)$ ទៅ $[0, 1]$ កំណត់ដោយ ៖

ពី មួយព្រឹត្តការណ៍ A (សំនុំរង) នៃ Ω គេ ផ្ទូនឹង ប្រូបាប $p_1(A_1)$ នៃព្រឹត្តការណ៍ A_1 នៅក្នុង $\Omega 1$ ដែលជាហេតុ ឲ្យកើតជាព្រឹត្តការណ៍ A ដោយ X ។ បើ p_X ជាការអនុវត្តន៍នោះ ហើយបើតាងដោយ A_1 សំនុំរងនៃ $\Omega 1$ កំណត់ដោយ $A_1 = \{ \omega ;\ \omega \in \Omega 1$ ហើយ $X(\omega) \in A \}$ នោះគេបាន ៖

$p_X(A) = p_1(A_1)$ ។

<u>និយមន័យ</u> (ស្តីពី ច្បាប់ប្រូបាប) (**distribution ou loi de probabilit**é)

បើ X ជា វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង យកចំនួន លើ $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ គេហៅថា ឌីស្ត្រីប៊ុយស្យុង (**distribution**) ឬ ច្បាប់ (loi) ប្រូបាប នៃ **X** (**loi de probabilit**é de X) គឺ សំនុំ នៃ គូ (x_i, p_i) ឬ ក៏ ការអនុវត្តន៍

$x_i \rightarrow p_i$ ដោយតាង $p_i = p(X = x_i)$ គឺជា $p(\{x_i\})$ ។

<u>ឧទាហរណ៍</u>

គេបោះ កូនឡុកឡាក់ មុខស្មើឥតខ្ចោះ (**un d**é **parfait**) មានលេខ ពី ១ ទៅ ៦ ដោយគេបោះពីរដង ជាប់គ្នា។ គេតាង **X** វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង គឺ « ចំនួន ចេញលេខ 1 »។ ចូររក ច្បាប់ប្រូបាប នៃ **X** ។

<u>ចម្លើយ</u>

ដោយគេបោះ ២ ដងជាប់គ្នា ហើយម្តងៗ លេខដែលអាចចេញ មាន ៦លេខគឺ ពី ១ ទៅ ៦ ដូច្នេះ ករណីអាច មាន $6 \times 6 = 36$ ។ ឥឡូវនេះយើងត្រូវរក ចំនួន x_i ដែល X ត្រូវយក ដោយយោងទៅតាម ប្រធានបទ ដែលថា គឺ : « ចំនួនចេញ លេខ 1 » ។

ដោយគេបោះ ២ ដងជាប់គ្នា ហើយម្តងៗ អាចចេញ លេខ 1 ឬក៏ មិនចេញលេខ 1 ហើយបើចេញលេខ 1 វិញ វាអាចចេញ 1ដង ក៏មាន ឬ ចេញ 2 ពីរដងជាប់គ្នាក៏មាន ។ ដូច្នេះ ចំពោះ វ៉ារីយ៉ាប មិនទៀង យើងមាន បី ក្រុម ហើយ យើងបាប $\Omega = \{0, 1, 2\}$

គឺថា $x_1 = 0$ មានន័យថា ៖ លេខ 1 ចេញ 0 ដង ក្នុងព្រឹត្តការណ៍បោះ ឡុកឡាក់ ពីរ ដងនេះ ។

គឺថា $x_2 = 1$ មានន័យថា ៖ លេខ 1 ចេញ 1 ដង ក្នុងព្រឹត្តការណ៍បោះ ឡុកឡាក់ ពីរ ដងនេះ ។

គឺថា $x_3 = 2$ មានន័យថា ៖ លេខ 1 ចេញ 2 ដង ក្នុងព្រឹត្តការណ៍បោះ ឡុកឡាក់ ពីរ ដងនេះ ។

ដើម្បី រក ច្បាប់ប្រូបាប ចំពោះ X យើងត្រូវរក ករណី ស្រប ចំពោះ ក្រុមនីមួយៗ ។

-- ចំពោះ $x_1 = 0$ បានន័យ ថា បោះលើកទីមួយ ក៏អត់មាន 1 ហើយបោះលើកទី 2 ក៏អត់មាន 1 ទៀត ដូច្នេះ ករណីស្រប របស់ x_1 គឺ $5 \times 5 = 25$ ករណីស្របៗ នេះយើងគិត ហាក់បីដូច ឡុកឡាក់ មានតែ 5 លេខ គឺ លេខ $2, 3, 4, 5, ; 6$ ។ ដូច្នេះ

$$p(X = 0) = p(0) = \frac{25}{36}$$

-- ចំពោះ $x_2 = 1$ បានន័យថា បោះលើកទីមួយ មាន 1 ហើយបោះលើកទី 2 ក៏អត់មាន 1 ឬមួយ បោះលើកទីមួយ អត់មាន 1 ហើយបោះលើកទី 2 គឺថា ៖

$(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)$ ឬ $(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)$ ដូច្នេះ ករណីស្រប មាន 10 ករណី ។ ដូច្នេះ $p(X = 1) = p(1) = \frac{10}{36}$

-- ចំពោះ $x_3 = 2$ បានន័យថា បោះលើកទីមួយ មាន 1 ហើយបោះលើកទី 2 មាន 1 ទៀត គឺថា ៖ $(1,1)$ ។ ដូច្នេះ ករណីស្រប មាន 1 ករណី ។

ដូច្នេះ $p(X=2)=p(2)=\frac{1}{36}$ ។ ដូច្នេះ ច្បាប់ប្រូបាបគឺ ៖

$$\left\{(0,\tfrac{25}{36}),\ (1,\tfrac{10}{36}),\ (2,\tfrac{1}{36})\right\}$$ ។

ដ្យាក្រាម ជាដំបង (diagramme en bâtons)

យើងបាន ច្បាប់ប្រូបាប នៃព្រឹត្តការណ៍ ជាចំនួន ដាច់ៗ នៃ X។ ដូច្នេះ យើងអាច តាងច្បាប់នោះ ដោយ ដ្យាក្រាម ហៅថា ដ្យាក្រាមជាដំបង ដែលមាន នៅក្នុងការសិក្សាខាង ស្ថិតិ (statistique) ដែរ ។

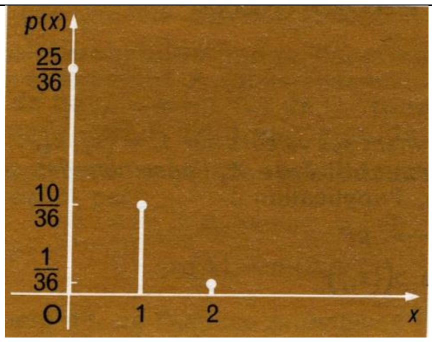
<table>
<tr>
<td>នៅក្នុងតម្រុយ ការតេស្យៀង (repère cartésien) ប្រូបាប នីមួយៗ តាងដោយ ខណ្ឌភាគ (segment) ដែលខាងចុង ជាចំណុច $(x_i, 0)$ និង (x_i, p_i) ។</td>
<td></td>
<td>

Fig-1 ច្បាប់ ប្រូបាប

Distribution ou loi de probabilité</td>
</tr>
</table>

Fig-1 ជាដ្យាក្រាម ចំពោះ ច្បាប់ប្រូបាប នៃឧទាហរណ៍ ខាងលើ ។

អនុគមន៍ រ៉េប៉ាទីស្យុង (Fonction de répartition)

ក៏ដូចនៅផ្នែក ស្ថិតិ (Statistique) ដែរ ដែលមានបំពេញការសិក្សា អំពី ឌីស្ត្រីប៊ុយស្យុង នៃស្ថិតិ ដោយឲ្យសញ្ញាណ នៃអនុគមន៍បូក (ឬថែក) ដូច្នេះនៅផ្នែកប្រូបាប យើងក៏ បញ្ចូល សញ្ញាណនេះដែរ ។

ឧទាហរណ៍

យើងត្រឡប់មកឧទាហរណ៍ ដែលហូតសន្លឹកបៀ មាន 52 សន្លឹក ហើយគេឲ្យតម្លៃ $0, 1, 2, 3, 4$ ទៅតាម សន្លឹកដែលហូតបាននោះ ជាគ្រាប់ ជាកម្ពោះ ជាក្រមុំ ជាស្តេច ឬ ជាអាត់ ។ ដូច្នេះយើងបាន $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ហើយ ច្បាប់នៃ ប្រូបាបក្នុង Ω គឺ ៖

$$p(0) = \frac{9}{13}, \quad p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = \frac{1}{13}$$ ។

ឥឡូវ គេឲ្យ យើងរក ប្រូបាប នៃព្រឹត្តការណ៍ $X < 3$?

ព្រឹត្តការណ៍នោះ គឺ $X = 0$ ឬ $X = 1$ ឬ $X = 2$ ដែលបានសរចក្តីថា ជាព្រឹត្តការណ៍ នៅក្នុង លំហ $\Omega 1$ ដែល X ឲ្យតម្លៃ 0 ឬ 1 ឬ 2 ។ ដោយព្រឹត្តការណ៍ទាំងនោះ មិនស្របគ្នា គឺមិនជាប់ទាក់ទងគ្នា ដូច្នេះ ប្រូបាបនៃ ប្រជុំ គឺ ស្មើនឹងផលបូកនៃ ប្រូបាបទាំងនោះ ។ ដូច្នេះ ៖ $p(X < 3) = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{9}{13} + \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{11}{13}$ ។ ហើយ ក៏ដូចគ្នាដែរ ចំពោះ ៖ $p(X < 0)$ $p(X < 1)$ $p(X < 2)$ $p(X < 4)$ ។ គេបាន ៖

$$p(X < 0) = 0 \quad p(X < 1) = \frac{9}{13} \quad p(X < 2) = \frac{10}{13} \quad p(X < 4) = \frac{12}{13}$$ ។

ជាទូទៅ បើ a ជាចំនួនពិត ដែលគេឲ្យ គេអាច និយាយពី $p(X < a)$ ហើយគេបាន៖

បើ $a \le 0$	$p(X < a) = 0$
បើ $0 < a \le 1$	$p(X < a) = \frac{9}{13}$
បើ $1 < a \le 2$	$p(X < a) = \frac{10}{13}$
បើ $2 < a \le 3$	$p(X < a) = \frac{11}{13}$
បើ $3 < a \le 4$	$p(X < a) = \frac{12}{13}$
បើ $4 < a \le \mathbf{5}$	$p(X < a) = \frac{13}{13} = 1$
ហើយ $\boldsymbol{F(x) = 1}$ បើ $\boldsymbol{a} > 5$ ។	

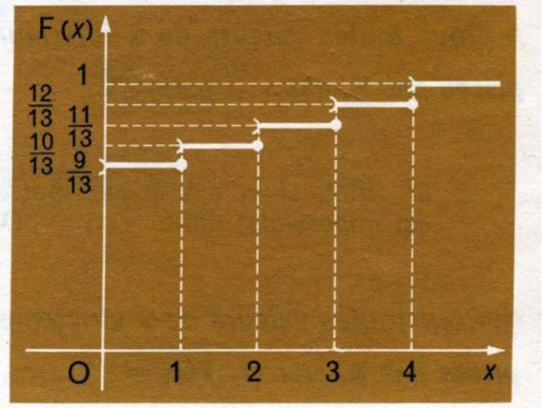


Fig-2 អនុគមន៍ រេបាទីស្យុង

Fonction de répartition

Fig-2 ជា ដ្យាក្រាម នៃអនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុងបូក របស់ឧទាហរណ៍នេះ។ យើងសង្កេត ឃើញថា $0 < a \leq 1$ ជាចន្លោះ បើកខាងឆ្វេង និងបិទ ខាងស្តាំ $]0,1]$ បានន័យថា $a > 0$ តែ $X < a$ ដូច្នេះ X អាចយក តម្លៃ 0 ហេតុនេះហើយ

បានជា $p(X < a) = \frac{9}{13}$ ហើយនៅក្នុង Fig-2 ចំពោះ អរដោនេ $\frac{9}{13}$ គេគូរ ខណ្ឌភាគ (*segment*) បើកខាង 0 និងបិទខាង 1 ។ បានន័យថា $\frac{9}{13}$ ជាប្រូបាប ចំពោះ $a \in]0,1]$ គឺថាបើ $a = 1$ នោះ $X < a \Rightarrow X < 1$ ។ អនុគមន៍ ដែល ឡើងដោយថ្នាក់ៗ បែបនេះ គេហៅថា អនុគមន៍ កាំជណ្តើរ (*fonction en escalier*) គឺអនុគមន៍ ដែល យកចំនួន មិនប្រែប្រួល នៅក្នុងចន្លោះ នីមួយៗ ។

អនុគមន៍ ពី សំនុំ R នៃចំនួនពិត ទៅ $[0,1]$ ដែល :

$$(x \in R) \rightarrow p(X < x)$$

អនុគមន៍នោះ ហៅថា <u>អនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុង នៃវ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង X</u>។

ជាទូទៅ គេតាង អនុគមន៍នោះដោយ F ។

ក្រាប នៃអនុគមន៍នោះ នៅក្នុង តម្រុយ ការតេស្យ៉ែង (*repère cartésien*) ហៅថា <u>បន្ទាត់កោងបូក</u> (*courbe cumulative*) (ចូរមើល Fig-2) ។

<u>និយមន័យ</u>

បើ X ជាវ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង ដាច់ៗពីគ្នា (*variable aléatoire discrète*) **គេហៅថា អនុគមន៍រ៉េបាទីស្យុង នៃ X គឺ ការអនុវត្តន៍ ពីសំនុំ R នៃចំនួនពិត ទៅ $[0,1]$ ដែល** $\boldsymbol{x} (\in \boldsymbol{R}) \rightarrow \boldsymbol{p}(\boldsymbol{X} < x)$

បើ F ជាអនុគមន៍នោះ $F(x)$ គឺជាប្រូបាប នៃព្រឹត្តការណ៍ $X < x$ ។

បើ $\Omega = \{ x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \}$ ជាសំនុំនៃចំនួន ដែល X យក (សកលរូបភាព) តម្រៀបតាមតម្លៃឡើង (*ordonnées par valeurs croissantes*) **ហើយ**

បើ $x_k < x \leq x_{k+1}$ នោះ $(X < x) \Leftrightarrow (X = x_1$ ឬ $X = x_2 \ldots..$ ឬ $X = x_k)$ ដូច្នេះ ៖ $F(x) = p(X < x) = p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_k$

គឺថា ៖ $F(x)$ ជា ផលបូក នៃប្រូបាប នៃព្រឹត្តការណ៍ $X = x_i$ ទាំងអស់ ដែល $x_i < x$ ។

កម្មសិទ្ធិ នៃអនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុង (Propriétés des fonctions de répartition).

1. គ្រប់ចំនួន x « តូច ឬ ក៏ស្មើ » ទៅនឹង ចំនួនដែលតូចជាងគេបំផុត យកដោយ X នោះ $F(x) = 0$ ។

   ពីព្រោះ បើ x_1 ជាចំនួនតូចជាងគេបំផុត ដែលយកដោយ X នោះ

   « ព្រឹត្តការណ៍ $X < x_1$ » មិនអាចមានទេ ដូច្នេះ $F(x) = p(X < x_1) = 0$ ។

2. គ្រប់ចំនួន x « ធំជាង ជាដាច់ខាត » ជាង ចំនួនដែល ធំ ជាងគេបំផុត យកដោយ X នោះ $F(x) = 1$ ។

   ពីព្រោះ បើ x_n ជាចំនួនធំជាងគេបំផុត ដែលយកដោយ X នោះ

   « ព្រឹត្តការណ៍ $X < x$ ដោយ $x_n < x$ » ច្បាស់ជាមានជានិច្ច

   ដូច្នេះ $F(x) = p(X < x) = 1$ ។

3. គ្រប់ អនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុង នៃវ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង ដាច់ៗពីគ្នា ជាអនុគមន៍ មិនប្រែប្រួល នៅលើចន្លោះ $]x_k, x_{k+1}]$ នីមួយៗ ដែល បើកខាងឆ្វេង និង បិទខាងស្តាំ ។

   ពីព្រោះបើ $x_k < x \leq x_{k+1}$ នោះ $F(x) = p(X < x)$ គឺជា ផលបូកនៃ ប្រូបាប $p_1 + p_2 + \cdots . + p_k$ ។

ដូច្នេះ គ្រប់ អនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុង នៃវ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង ដាច់ៗពីគ្នា ជាអនុគមន៍ កាំជណ្តើរ ។

4.គ្រប់ អនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុង នៃវ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង ដាច់ៗពីគ្នា ជាអនុគមន៍ កើន $(fonction\ croissante)$ **ក្នុងន័យទូលាយ** $(au\ sens\ large)$ ។

ពីព្រោះថា បើ $x < x'$ បើព្រឹត្តការណ៍ $X < x$ មាន នោះព្រឹត្តការណ៍ $X < x'$ ក៏មានដែរ ។ ដូច្នេះ $p(X < x) \leq p(X < x')$ ។ $x < x' \Rightarrow F(x) \leq F(x')$ ។

5.ប្រូបាបនៃ ព្រឹត្តការណ៍ « X យកតម្លៃក្នុង $[a, b[$ ដែលគេឲ្យ » ស្មើនឹង $F(b) - F(a)$ **ដែលគេសរសេរ** $p(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$ ។

យើងរក ព្រឹត្តការណ៍ ដែលផ្ទុយនឹង $a \leq X < b$ ។ គឺ ជាប្រជុំនៃ ពីរ ព្រឹត្តការណ៍ ដាច់ ពីគ្នា (2 évènements disjoints) $X < a$ ឬ $X \geq b$ ។ ជាទូទៅ បើ $p(A)$ ជាប្រូបាបនៃព្រឹត្តការណ៍ A នោះ $[1 - p(A)]$ ជាប្រូបាបនៃព្រឹត្តការណ៍ ផ្ទុយពី A ។ តាមនិយមន័យ នៃ អនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុង ចំពោះព្រឹត្តការណ៍ $X < a$ ប្រូបាបគឺ $F(a)$ ហើយចំពោះ ព្រឹត្តការណ៍ $X \geq b$ គឺជាព្រឹត្តការណ៍ផ្ទុយនឹង $X < b$ ដែលមានប្រូបាប $F(b)$ ។ ដូច្នេះ ព្រឹត្តការណ៍ $X \geq b$ មាន ប្រូបាប ស្មើនឹង $[1 - F(b)]$ ។

<u>គណនា $p(a \leq X < b)$</u>

ដោយប្រើ ស្វ័យស័ត្យ នៃប្រូបាបទាំងអស់ (axiome des probabiltés totales) គេបាន ៖

$$p(a \leq X < b) = 1 - [F(a) + (1 - F(b)]$$

ដូច្នេះ ៖

$$p(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$ ។

<u>បន្ទាត់កោងបូក (Courbe cumulative)</u>

ក្រាប ក្នុងតម្រុយការតេស្យ៉ែង (représentation graphique cartésienne) នៃអនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុង មានឈ្មោះថា បន្ទាត់កោងបូកៗ ក្រាបនោះ ប្រកបទៅដោយ

ខណ្ឌភាគ (segments) ឬ កន្លះបន្ទាត់ (demi – droite) ។ ចំពោះ ខណ្ឌភាគ គេកំណត់ថា មានតែចុងខាងស្តាំតែប៉ុណ្ណោះ ដែលរាប់នៅក្នុង បន្ទាត់កោងបូក ។

ដើម្បីនឹង គូរបន្ទាត់កោង គេសង្កេតឃើញថា កាលណា គេឆ្លងកាត់ចំណុច x_k អនុគមន៍រ៉េបាទីស្យុង លោតកំពស់ស្មើនឹង p_k ។

ឧទាហរណ៍

គេបោះ ឡុកឡាក់ តែមួយដង ។ ហើយគេ កំណត់ វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង X ដោយយក ចំនួន $1, 2, 3, 4, 5, 6$ កាលណាឡុកឡាក់ចេញលេខ $1, 2, 3, 4, 5$ ឬ 6 ។ ចូរគូរ បន្ទាត់កោងបូកនៃ X ។

ដោយ $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$

ហើយអនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុង F នៃ X គឺ

បើ $x \leq 1$ $F(x) = 0$; បើ $1 < x \leq 2$ $F(x) = \frac{1}{6}$; បើ $2 < x \leq 3$ $F(x) = \frac{1}{3}$;

បើ $3 < x \leq 4$ $F(x) = \frac{1}{2}$; បើ $4 < x \leq 5$ $F(x) = \frac{2}{3}$;

បើ $5 < x \leq 6$ $F(x) = \frac{5}{6}$; បើ $6 < x$ $F(x) = 1$ ។

ហើយយើងបានបន្ទាត់ កោងបូក (Fig- 3-FR) ៖

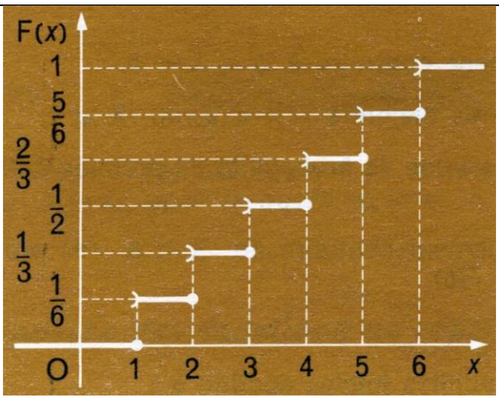


Fig-3-FR បន្ទាត់កោងបូក-បារាំង

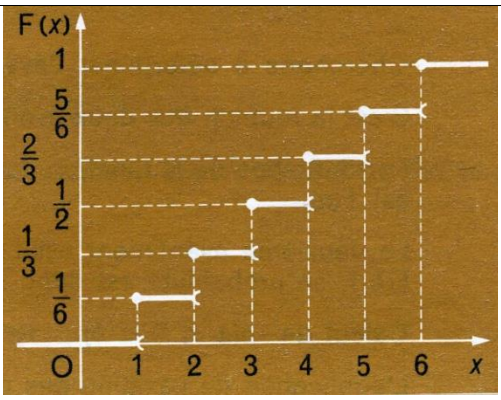


Fig-4-EN បន្ទាត់កោងបូក-អង់គ្លេស

សង្កេត

ទៅតាមការប្រើនៅប្រទេសបារាំង គេកំណត់ អនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុង **F** ដោយៈ $x \to F(x) = p(X < x)$ ។ តែក៏គួរដឹងដែរ នៅប្រទេស ជាច្រើន ដូចជាប្រទេស អង់គ្លោសាក់សុង (anglo – saxons) គេតាង $F(x) = p(X \le x)$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ $x \in]x_k, x_{k+1}[$ និយមន័យ ទាំងពីរនេះ នាំមកនូវ ចំនួនដូចគ្នា ។ តែ ចំពោះ $x = x_k$

-នៅករណីទី១ $F(x_k) = p(X < x_k) = p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_{k-1}$

-នៅករណីទី២ $F(x_k) = p(X \le x_k) = p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_{k-1} + p_k$

តម្លៃខុសគ្នា ស្មើនឹង $\boldsymbol{p_k}$ ដែលជាប្រូបាបនៃ ព្រឹត្តការណ៍ $X = x_k$ ។ ដូច្នេះ ៖

-នៅករណីទី១ អនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុង មិនប្រែប្រួល នៅក្នុងចន្លោះ $]\boldsymbol{x_k}, \boldsymbol{x_{k+1}}]$ (បើកឆ្វេង បិទស្តាំ) (Fig-3-FR) ។ - នៅករណីទី២ អនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុង មិនប្រែប្រួល នៅក្នុងចន្លោះ $[\boldsymbol{x_k}, \boldsymbol{x_{k+1}}[$ (បិទឆ្វេង បើកស្តាំ) (Fig-4-EN) ។

6.ចំណោទ នៃ ភាពចែកដាច់ (*Problèmes de divisibilité*).

ការសិក្សាសំខាន់ជាង ក្នុងលេខគណិតថ្នាក់ដំបូង គឺចំណោទ ដែលកើតឡើង អំពីការសិក្សានូវ ភាពចែកដាច់ នៃប្រភាគ ។ គេ សម្រួល ប្រភាគ ដោយចែក [ភាគយក និង ភាគបែង] នឹងតួចែករួម (*leurs diviseurs communs*) ។ ហើយដើម្បី សម្រួល ប្រភាគ ពីរ ឲ្យមាន ភាគបែងតែមួយ នោះត្រូវ ស្គាល់ ពហុគុណរួម (*un multiple commun*) នៃភាគបែង ទាំងពីរ (*de leurs dénominateurs*) ។ ដូច្នេះ គេត្រូវដោះស្រាយនូវ ចំណោទ ពីរ ដូចតទៅនេះ៖

1/ រក សំនុំ នៃតួចែករួម នៃពីរចំនួនដែលគេឲ្យ (*déterminer l'ensemble des diviseurs communs de deux nombres donnés*).

2/ រក សំនុំ នៃពហុគុណរួម នៃពីរចំនួនដែលគេឲ្យ (*déterminer l'ensemble des multiples communs de deux nombres donnés*).

តួចែករួម ធំបំផុត (*P.G.C.D.*) *LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE*

DEUX NOMBRES.

សំនុំ នៃតួចែករួម នៃពីរចំនួន **a** និង **b** សំនុំនោះ ត្រូវបន្ថែម (**majoré**) ដោយ ចំនួនទីមួយៗ **a** ឬ **b** ។ ដូច្នេះ តាមការស្នើនៅ ជំពូកទី បី (**III,6,3**) សំនុំនោះត្រូវមាន ចំនួនមួយដែលធំជាងគេ។ ដូច្នេះ យើងបានបញ្ជាក់ ថាមាន <u>តួចែករួមមួយ ដែលធំជាងគេ</u> (**un plus grand commun diviseur**) ចំពោះ ពីរចំនួនគត់ ណាក៏ដោយ ។ ដោយវិធីដូចគ្នានេះ គេក៏អាច បង្ហាញថា មាន ចំនួនមួយដែលធំជាងគេ នៅក្នុងសំនុំនៃតួចែករួម នៃចំនួន $a_1, a_2, \dots\dots, a_n$ ដែលគេឲ្យ។ តែ ទ្រឹស្តីបទ នេះគ្រាន់តែបានបញ្ជាក់ថា មាន ចំនួនធំនោះ តែ មិនបានប្រាប់នូវរបៀបដែល រក ឲ្យឃើញតម្លៃនូវ **P.G.C.D** នៃចំនួនដែលគេឲ្យ។ ហើយក៏មិនបានឲ្យ នូវកម្មសិទ្ធិជាគ្រឹះ នៃ **P.G.C.D** ដែលថា ៖ តួចែក នៃចំនួនទាំងឡាយដែលគេឲ្យ ជាតួចែក របស់ **P.G.C.D** នៃចំនួនទាំងនោះដែរ ។

<u>**ក្បួនដោះស្រាយ អឺគ្លីត**</u> <u>(*Algorithme d'Euclide*)</u> ថ្វីបើចាស់យូរណាស់មកហើយ បានឲ្យទាំង *P.G.C.D* និង កម្មសិទ្ធិទាំងឡាយផង ដូច្នេះ នៅតែមានតម្លៃដដែល។ យើងរំលឹកឡើងវិញដូចតទៅនេះ៖

I. ដោយចេញពីការសង្កេត ៖ តួចែករួម នៃ a និង b ក៏ចែកដាច់ នូវ សំណល់ (*le reste*) ក្នុងការចែក a ដោយ b (*de la division de a par b*)។

II. ចំនួន **a** និង **b** គេបានឲ្យ នោះគេ កំណត់ ស្វីត b_i ដោយ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ៖

(**1**) $b_0 = a \quad b_1 = b \quad b_{i-1} = b_i q_i + b_{i+1}$ និង $b_{i+1} < b_i$ (R2)

ដូច្នេះ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ខាងចុងនេះ សម្តែងថា b_{i+1} ជាសំណល់ ក្នុងការចែក b_{i-1} ដោយ b_i។ ដោយ b_{i-1} និង b_i គេដឹង ដូច្នេះ b_{i+1} ត្រូវកំណត់បាន កាលណា b_i មិនសូន្យ ។ តែ ស្វីត b_i ជាស្វីត ចុះ ជានិច្ច គេមាន វិសមភាព $b_{i+1} \leq b_i - 1$

ដូច្នេះ ដោយ វេគារ៉េង លើ $b_{i+1} \leq b_i - 1$ ៖ នោះមាន ចំនួន k យ៉ាងច្រើនស្មើនឹង b

ដែលឲ្យ $b_{k+1} = 0$ ដូច្នេះគេបាន $b_{k-1} = b_k q_k$ ។ ហើយ ការចែក a ដោយ b ក៏មិនអាចបន្ត ហួសពីនេះ ពីព្រោះ សំណល់ $b_{k+1} = 0$ វាសូន្យទៅហើយ ។

ដើម្បីនឹងយល់ ទំនាក់ទំនង (R2) ខាងលើនេះ ខ្ញុំសូមយកឧទាហរណ៍មួយដោយ យក $a = 156$ និង $b = 84$ ដូច្នេះ ដោយ (R2)

$b_0 = 156$ $b_1 = 84$ $b_{i-1} = b_i q_i + b_{i+1}$ និង $b_{i+1} < b_i$

ចំពោះ $i = 1$ => $b_0 = b_1 q_1 + b_2$ => $156 = 84\times 1 + 72$ និង $b_2 = 72 < 84$

=> $(b_0, b_1, b_2) = (156, 84, 72)$

ចំពោះ $i = 2$ => $b_1 = b_2 q_2 + b_3$ => $84 = 72\times 1 + 12$ និង $12 < 72$

=> $(b_1, b_2, b_3) = (84, 72, 12)$

ចំពោះ $i = 3$ => $b_2 = b_3 q_3 + b_4$ => $72 = 12\times 6 + 0$ និង $0 < 12$

=> $(b_2, b_3, b_4) = (72, 12, 0)$ ដូច្នេះ យើងឃើញថា សំណល់ $b_4 = 0$ ហើយ $b_2 = b_3 q_3$ **=>** តួចែក របស់ $\mathbf{b_3}$ ក៏ ជាតួចែក របស់ $\mathbf{b_2}$ ដែរ ហើយក៏ជាតួចែករបស់ $\mathbf{b_1}$ ទៀត ពីព្រោះ $b_1 = b_2 q_2 + b_3$ …. ។ល។ នៅក្នុង ឧទាហរណ៍នេះ $b_3 = 12 = 3 \times 4$ ដូច្នេះ ចំនួន 3 និង 4 ជាតួចែករបស់ $\mathbf{b_3}$ ។ ហើយក៏ជាតួចែករួម របស់ b_0 និង b_1 ដែរ ។

III. គេបង្ហាញដោយ វ៉េគារង់ថា សំនុំ នៃតួចែករួម របស់ a និង b ស្មើនឹង សំនុំ នៃតួចែករួម របស់ b_i និង b_{i+1} $\forall i \le k-1$ (ដោយ $b_{k+1} = 0$) ។ តែដោយ សំនុំតួចែករួម របស់ b_{k-1} និង b_k ក៏ស្មើនឹង សំនុំ នៃតួចែក របស់ b_k នោះបើដោយតាង $d = b_k$ យើងអាចថ្លែងថា ៖

<u>**ការស្មើ (IV,6,1)**</u>

បើ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ មិនសូន្យ នោះមានចំនួន d មួយ ដែល សំនុំនៃ តួចែករួម នៃ a និង b ស្មើនឹងសំនុំនៃ តួចែកនៃ d ។

ដូច្នេះ d ជាតួចែករួម ធំបំផុត នៃ a និង b។ វាស្មើនឹង សំណល់ចុងក្រោយគេ មិនសូន្យ នៅក្នុងការចែក បន្តគ្នា កំណត់ដោយ ទំនាក់ទំនង (1) ។

ការកត់ត្រា

ការកត់ត្រាតទៅនេះ មិនមែនជាទូទៅទេ សូមទុកដូចជា លំហាត់ទៅចោះ។

ដោយ មួយគូ (a,b) គេអាចផ្គូផ្គងនឹង ចំនួនគត់មួយ មិនសូន្យ ដែលតាងដោយ $d = P.G.C.D(a,b)$ ។ បើយើងតាងដោយ N^* សំនុំនៃចំនួនគត់មិនសូន្យ នោះយើង បានកំណត់នូវ ការអនុវត្តន៍មួយ ពី $N^* \times N^*$ ទៅក្នុង N^* ហើយបើយើង សរសេរការ ការអនុវត្តន៍នោះដោយ តួអក្សរ Δ នោះ $P.G.C.D(a,b)$ អាចសរសេរជា $\Delta(a,b)$។ តែយើងក៏សង្កេតឃើញថា ការអនុវត្តន៍ Δ កំណត់ ឲ្យបាន ច្បាប់តាក់តែងផ្សំក្នុងមួយ (loi de composition interne) លើ N^* ដូច្នេះយើង បញ្ចូលមកនូវ សញ្ញាគណនាមួយ ដូចជា $\wedge$ ហើយតាង $P.G.C.D$ នៃចំនួន a និង b ដោយ $a \wedge b$ ។

7.កម្មសិទ្ធិ នៃ P.G.C.D (Propriété du P.G.C.D.)

1°/ **P.G.C.D** **ជា វិធី គណនា មានលក្ខណៈ ត្រលប់** (opération commutative)។

ពីព្រោះតាម និយមន័យ នៃ $P.G.C.D.(a,b)$ ចំនួន a និង b មានមុខងារដូចគ្នា។

2°/ P.G.C.D ជា វិធី គណនា មានលក្ខណៈ ផ្តុំ (opération associative)

ចំនួន a b និង c គេឲ្យ ។ យើងតាងដោយ ៖

A សំនុំ នៃ តួចែកទាំងអស់ របស់ a B សំនុំ នៃ តួចែកទាំងអស់ របស់ b

C សំនុំ នៃ តួចែកទាំងអស់ របស់ c ។ ហើយ $x \wedge y$ តាង $P.G.C.D.$ របស់ x និង y ។

ដូច្នេះ $a \wedge b$ ជា ធាតុដែលធំជាងគេនៅក្នុង $A \cap B$ ហើយ $(a \wedge b) \wedge c$ ជា ធាតុដែលធំ ជាងគេនៅក្នុង $(A \cap B) \cap C$ ។ ហើយក៏ដូចគ្នាដែរ $a \wedge (b \wedge c)$ ជា ធាតុដែលធំជាងគេ

នៅក្នុង $A \cap (B \cap C)$ ។ ហើយដោយ ប្រសព្វ (intersection) នៃសំនុំ មានលក្ខណៈ ផ្តុំ នោះ គេបាន ៖ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ => $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ ។

ដូច្នេះ ចំពោះ P.G.C.D. នៃចំនួនជាច្រើនដូចជា $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ យើងអាចសរសេរ ដោយ $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots\ldots \wedge a_n$ ដោយមិនចាំបាច់ប្រើ វង្វង់ក្រចក (..) ហើយក៏មិនបាច់រវល់ ពី លំដាប់ ដែលត្រូវសរសេរ ចំនួនទាំងនោះទៀតផង។

3°/

<u>ការស្មើ</u> <u>(IV,7,1)</u>

បើ គេ គុណ គ្រប់ចំនួន a_i ដោយ ចំនួនដដែល m នោះ P.G.C.D. នៃ ចំនួនទាំងនោះ ក៏គុណនឹង m ដែរ ។

យើងបានឃើញ តាម **<u>ក្បួនដោះស្រាយ អឺគ្លីត</u>** <u>(Algorithme d'Euclide)</u> កាលណាគេ គេគុណ ចំនួន a និង b ដោយ ចំនួន m តែមួយ នោះ សំណល់ នៃការចែក តៗ មក ក៏ គុណនឹង m ដែរ ។ ដូច្នេះ សំណល់ចុងក្រោយ មិនសូន្យ ក៏គុណនឹង m ដែរ ។ ដូច្នេះ យើង បានបង្ហាញ ការស្មើ ដោយ ពីរ ចំនួន។ ហើយលទ្ធផលនេះក៏អាចពង្រីកទៅ ករណី ជាទូទៅ។

<u>ទ្រឹស្តីបទ បឺហ្សូត</u> <u>(Théorème de Bezout)</u>

បើ d ជា P.G.C.D. នៃ ចំនួន a និង b នៅពេលនោះគេអាច រកបានទូវចំនួនគត់ ធម្មជាតិពីរ x និង y ដែលឲ្យ $d = ax - by$ ។

ដើម្បី បង្ហាញ ទ្រឹស្តីបទនេះ គេគ្រាន់តែ ប្រើឡើងវិញ **<u>ក្បួនដោះស្រាយ អឺគ្លីត</u>** <u>(Algorithme d'Euclide)</u> ដោយបង្ហាញថា សំណល់ y_i នីមួយៗ បានមកពីការចែក តៗ គ្នានោះ គេអាចសរសេរ ជាពង $y_i = u_i a - v_i b$ ដោយយកចំនួន ដ៏សមរម្យ ចំពោះ u_i និង v_i ។ ហើយបន្ទាប់មក យើងប្រើ ការបង្ហាញដោយ រ៉េគាំរ៉េង ។

ឧទាហរណ៍ ជាជំនួយ

មុននឹងបន្តទៅមុខទៀត ខ្ញុំសូមលើកជាឧទាហរណ៍ខ្លះដូចតទៅនេះ ៖

A – ឧទាហរណ៍ទី១ ស្តីពី ក្បួនដោះស្រាយ អឺគ្លីត $(Algorithme\ d'Euclide)$

ក្បួននេះ អាចឲ្យ $P.G.C.D.$ នៃ ចំនួន a និង b។ ឥឡូវនេះ យើងរក $P.G.C.D.$ នៃ ចំនួន a និង b ដោយ សន្មត ថា $a > b$ ហើយ សំណល់ នៃការចែក ទី ៥ ស្មើនឹងសូន្យ ។

ក្បួនដោះស្រាយ អឺគ្លីត ប្រើរូបមន្ត ៖ $a = bq + r$ ដោយ $r < b$ ។

តទៅនេះ យើងតាង a, b, r ដោយប្រើ សន្ទស្សន៍ ហើយយើងបាន៖

$a = b_0$
$b = b_1$
$r = b_2$ ដូច្នេះ

$b_0 = b_1q_1 + b_2$ ដោយ $b_2 < b_1$

$b_1 = b_2q_2 + b_3$ ដោយ $b_3 < b_2$

$b_2 = b_3q_3 + b_4$ ដោយ $b_4 < b_3$

$b_3 = b_4q_4 + b_5$ ដោយ $b_5 < b_4$

ដោយ $b_1 > b_2 > b_3 > b_4 > b_5 > \cdots$ ដូច្នេះ សំណល់ $\boldsymbol{b_i}$ ត្រូវតែសូន្យកាលណា យើងចេះតែ បន្តលេខចែកនោះ តទៅទៀត ។ ដោយយើងបានសន្មតថា សំណល់ $b_5 = 0$ ទំនាក់ទំនង ខាងលើ ទៅជា

(1) $b_2 = b_0 - b_1q_1$
(2) $b_3 = b_1 - b_2q_2$
(3) $b_4 = b_2 - b_3q_3$
(4) $0 = b_3 - b_4q_4$

(4) => $b_3 = b_4q_4$ => b_4 ជាតួចែក មួយ របស់ b_3 (5)

(3) => b_4 ជាតួចែក របស់ ($b_2 - b_3q_3$) } ដូច្នេះ b_4 ជាតួចែក មួយ របស់ b_2 [11] (6)

តែដោយ b_4 ជាតួចែក មួយ របស់ b_3

ដោយ (5) និង (6) =>

b_4 ជាតួចែក មួយ របស់ b_2 និង b_3 } b_4 ជាតួ ចែក មួយ របស់ b_1 (7)

ដូច្នេះដោយ (2)

ដោយ (6) និង (7) =>

b_4 ជាតួចែក មួយ របស់ b_2 និង b_1 } b_4 ជាតួ ចែក មួយ របស់ b_0 (8) ។

ដូច្នេះដោយ (1)

រួមសេចក្តីទៅ បើ សំណល់ $b_5 = 0$ នោះ b_4 ជាតួចែក រួម នៃ b_0 និង b_1 ហើយ b_4 ក៏ជាតួចែក រួម នៃ (b_1,b_2), (b_2,b_3), (b_3,b_4) ដែរ ។ ហើយ ដោយ ក្នុង (b_3,b_4) b_4 ជាតួចែករួម ធំ ជាងគេ ក្នុងចំណោម តួចែករួម ឯទៀតៗ ដូច្នេះ យើងបាន $P.G.C.D.$ ដោយប្រើ ក្បួនដោះស្រាយ អឺក្លីត នេះ។

<u>ឧបមា យើងរក $P.G.C.D(156,84)$</u>

ដោយធ្វើលេខចែក ធម្មតា តៗគ្នា យើងបាន ៖

$156 = 84 \times 1 + 72$ (72 សំណល់)

$84 = 72 \times 1 + 12$ (12 សំណល់)

$72 = 12 \times 6$ (0 សំណល់)

នៅក្នុងនេះ ៖

$b_0 = 156$; $b_1 = 84$; $b_2 = 72$; $b_3 = 12$; $b_4 = 0$

[11] b_4 ជាតួចែករបស់ b_3 => $b_3 = k.b_4$ ហើយ b_4 ជាតួចែក របស់ ($b_2 - b_3q_3$) => ($b_2 - b_3q_3$) = $h.b_4$ => $b_2 = h.b_4 + b_3q_3 = h.b_4 + k.b_4.q_3 = b_4(h + k.q_3)$ ។

ដូច្នេះ $P.G.C.D(156,84) = 12$ ហើយ 12 ចែកនឹង b_0, b_1, b_2, b_3 ដាច់ទាំងអស់ ។

ដោយ 12 = 4 x 3 = 2 x 2 x 3 ដូច្នេះ ចំនួន 2, 3, 4, 12 ក៏ជា តួចែករួម ដែរ ។

បន្ថែម

ដោយសម័យនេះ ជាសម័យ computer ពត៌មានវិជ្ជា យើងអាចប្រើ ម៉ាស៊ីន ឲ្យគណនា។

ដូច្នេះ ក្បួនដោះស្រាយ អឺគ្លីត អាចសរសេរ ដូចជា៖

រក $PGCD(a, b)$ ដោយ $a > b$

1/ សេចក្តីផ្តើម

$$\boldsymbol{A = a}$$
$$\boldsymbol{B = b}$$
$$\boldsymbol{R1 = B}$$

2/ ការគណនា

BOUCLE:

$\boldsymbol{R = A - INT(A/B) \times B}$ ដោយ $INT(A/B)$ គឺចំនួនគត់ បានមក

ពី ការចែក A ដោយ B (partie entière de A/B)

បើ $\boldsymbol{R = 0}$ ទៅ ***FIN***

$$\boldsymbol{R1 = R}$$
$$\boldsymbol{A = B}$$
$$\boldsymbol{B = R}$$

ទៅ ***BOUCLE***

FIN :

$\boldsymbol{PGCD = R1}$ (ចប់តែប៉ុណ្ណោះ) ។

(ចំពោះ ***programme*** នេះ បើមានខុសសូមជួយ កែផង)

B-ឧទាហរណ៍ទី២ ស្តីពី ទ្រឹស្តីបទ បឺហ៊្សូត (Théorème de Bezout)

ដែលចែងថា មាន ចំនួន x និង y ដែលឲ្យ $PGCD(a, b) = ax - by$

យើងយក ចំនួន a និង b និងការសន្មត $b_5 = 0$ ដូចគ្នានឹង ឧទាហរណ៍ទី១

ដូច្នេះ $b_4 = PGCD(a,b)$ ហើយយើងបាន៖

$$(1) \quad b_2 = b_0 - b_1q_1$$
$$(2) \quad b_3 = b_1 - b_2q_2$$
$$(3) \quad b_4 = b_2 - b_3q_3$$

ដូច្នេះ ៖

$$b_4 = b_2 - b_3q_3 = (b_0 - b_1q_1) - (b_1 - b_2q_2)q_3 = (b_0 - b_1q_1) - b_1q_3 + b_2q_2q_3$$
$$b_4 = b_0 - b_1q_1 - b_1q_3 + (b_0 - b_1q_1)\, q_2q_3$$
$$b_4 = b_0\,(1 + q_2q_3) - b_1(q_1 + q_3 + q_1q_2q_3)$$

ដូច្នេះ យើងបាន ៖

$PGCD(a,b) = ax - by$ ដោយ $a = b_0$; $b = b_1$; $x = 1 + q_2q_3$ និង

$y = q_1 + q_3 + q_1q_2q_3$ ។

c – ឧទាហរណ៍ទី៣ ទំនាក់ទំនង លំដាប់លើផ្នែក (Relation d'ordre partiel)

យើងធ្លាប់ឃើញ ទំនាក់ទំនង លំដាប់ (Relation d'ordre) លើសំណុំ។ ឥឡូវនេះ យើងនឹង ឃើញ ទំនាក់ទំនង លំដាប់លើផ្នែក(Relation d'ordre partiel) ដែល ជា ទំនាក់ទំនង លំដាប់ លើ ផ្នែកមួយនៃសំណុំ ។ ឧទាហរណ៍ ៖

ទំនាក់ទំនង « a ចែកនឹង b ដាច់ » សរសេរកាត់ជា « a / b " នោះ ជា ទំនាក់ទំនង លំដាប់លើផ្នែក ពីព្រោះ ៖

1/ « a / a " ត្រូវ ពីព្រោះ « a ចែកនឹង a ដាច់ » ត្រូវ ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនងរ៉េផ្លិចស៊ីវ ។

2/ « a / b » និង « b / a " => $a = b$ ត្រូវ ពីព្រោះ

« a / b » => $a = bq$
« b / a " => $b = aq'$

$a = (aq')q = = aqq'$ => $qq' = 1$ ដូច្នេះ $q = q' = 1$

ដោយ $a = bq$ ហើយ $q = 1$ ដូច្នេះ $a = b$ ហើយ

ទំនាក់ទំនង ប្រឆាំងឆ្លុះ (antisymétrique).

3/ « a / b » និង « b / c " => « a / c » ត្រូវ ពីព្រោះ

« a / b » => $a = kb$ ⎫ $a = k(lc) = (kl)c$

« b / c " => $b = lc$ ⎭ $a = klc$ ⇔ « a / c » ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនង ត្រង់ស៊ីទីវ

(*transitive*).

ដូច្នេះ « a ចែកនឹង b ដាច់ » ជាទំនាក់ទំនង លំដាប់ តែ ដោយ មានចំនួន គត់ ខ្លះ ដូច ជា 2 និង 3 ដែល ចែកនឹងគ្នាមិនដាច់ នោះ ទំនាក់ទំនង « a ចែកនឹង b ដាច់ » ជា ទំនាក់ទំនង លំដាប់លើផ្នែក នៃសំនុំ N^* (*Relation d'ordre partiel sur* N^*) ។

<u>សង្កេត</u>

ពាក្យថាលំដាប់ គឺបានន័យថា វត្ថុពីរ ជាទូទៅនៅក្នុងសំនុំ អាចប្រៀបធៀបនឹងគ្នាបាន <u>ជានិច្ច</u> ។ ដូចជា a និង b អាចប្រៀបធៀបនឹងគ្នាបានជានិច្ច ចំពោះ ទំនាក់ទំនង « $\leq$ » តែពុំអាច អាចប្រៀបធៀបនឹងគ្នាបាន ជានិច្ចទេ ចំពោះ ទំនាក់ទំនង « a / b » ។

<u>D – ឧទាហរណ៍ទី ៤</u>

ដោយ ទំនាក់ទំនង « a ចែកនឹង b ដាច់ » ត្រង់ស៊ីទីវ គឺថា ៖

« a ចែកនឹង b ដាច់ » និង « b ចែកនឹង c ដាច់ » => « a ចែកនឹង c ដាច់ »

បានន័យថា a ចែកនឹង a, b, c ដាច់ ហើយ យើងអាចនិយាយ អំពី **P.G.C.D.** នៃ $\mathbf{n}$ ចំនួន $\mathbf{a_i}$ គឺ ជាចំនួនដែល ធំជាងគេ ក្នុងបណ្តាល ចំនួនដែល តូចជាង ចំនួន $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ។

<u>8.ទ្រឹស្តីបទ ហ្គោស (Théorème de Gauss) . ពហុគុណរួម តូចបំផុត (Plus Petit Commun Multiple).</u>

<u>ការសង្កេតជាដំបូង</u>. បើកាលណាគេចែក ចំនួន a និង b ដោយ តួចែករួមណាមួយនោះ

ដោយការស្មើ $(IV, 8, 1)$, $P.G.C.D.(a,b)$ ក៏ចែកដោយ ដោយ តួចែកនោះដែរ ។ ជាពិសេស បើ d ជា $P.G.C.D.(a,b)$ នោះ $P.G.C.D.$ នៃ $a/_d$ និង $b/_d$ គឺ ស្មើនឹង 1 ។

និយមន័យ

គេថា ចំនួន a និង b បឋម នឹងគ្នា (premiers entre eux) កាលណា $P.G.C.D.(a,b)$ ស្មើនឹង 1 [12]។ (On dit que deux nombres a et b sont premiers entre eux si leur $P.G.C.D.$ est égal à 1.)

ដោយការសង្កេតនេះ យើងមិនពិបាកនឹងយល់ទេ នូវ ការស្មើដូចតទៅនេះ ដែលជា លទ្ធផលមួយដ៏សំខាន់ ក្នុង ទ្រឹស្តីចែកដាច់ ។

ទ្រឹស្តីបទ ហ្គោស (Théorème de Gauss).

បើចំនួន c ជាតួចែក នៃ ផលគុណ ab ហើយ បើ c បឋមនឹង a នោះ c ជាតួចែក នៃ b។

យើងដឹងថា c ជាតួចែក របស់ cb នឹង របស់ ab ។ ដោយ c បឋមនឹង a ដូច្នេះ $P.G.C.D.$ របស់ cb នឹង ab គឺ b ។ ដោយ c ជា តួចែករួម នៃ cb នឹង ab ដូច្នេះ c ជាតួចែក នៃ $P.G.C.D.$ គឺ b ។

---

12 ចូរ សង្កេត ការខុសគ្នា រវាង **ចំនួនបឋម** និង **ចំនួនពីរ បឋមនឹងគ្នា** ។ ចំនួនបឋម គឺ ចំនួនដែលមាន តួចែកតែពីរគត់ គឺ 1 និង ចំនួននោះឯងតែម្តង។ ដូចជា 5 ជាចំនួនបឋម ពីព្រោះ តួចែករបស់វា មាន 1 និង 5។ ចំណែក ចំនួនគត់ ពីរ a និង b បឋមនឹងគ្នា លុះត្រាតែ $P.G.C.D.(a,b) = 1$ ។ ដូចជា ចំនួន 6 និង 25 បឋមនឹងគ្នា ពីព្រោះ $P.G.C.D.(25,6) = 1$ ថ្វីបើ 25 និង 6 មិនមែនជា ចំនួនបឋមក៏ដោយ។

ថ្វែង ដោយរបៀប ម្យ៉ាងទៀត៖

ចំពោះ ចំនួនគត់ x *មួយ គេអាចផ្គូផ្គងនឹង សំនុំ* D_x *នៃ តួចែកទាំងឡាយរបស់* x *ដែល ខុសពី 1 ។ ដូច្នេះ [* a *និង* b *បឋម នឹងគ្នា] សមមូលនឹង [* $D_a \cap D_b = \emptyset$ *] ។ ហើយ ទ្រឹស្តីបទ ហ្គោស មានន័យ សមមូលនឹង ៖*

$\boldsymbol{D_a \cap D_b = \emptyset \Rightarrow D_{ab} = D_a \cup D_b}$ ។

ការថ្វែងនេះ អាចបង្រីក ដល់ករណី ដែលមាន ចំនួន a_i *ច្រើន ។*

ពហុគុណ រួម តូច បំផុត (Plus petit commun multiple).

សំនុំ នៃពហុគុណ រួម នៃចំនួន a *និង* b *មិនមែនជា សំនុំទទេ (*$\emptyset$*) នោះទេ ។ ពីព្រោះ វាមានធាតុ* ab *នៅក្នុងនោះដែរ។ ហើយដោយតាមការស្នើ (III, 6,2) សំនុំនោះ ត្រូវមានធាតុមួយ ដែលតូចជាងគេ ដែលហៅថា ពហុគុណ រួម តូច បំផុត នៃ* a *និង* b *$P.P.C.M.(a,b)$ ។ បើ $P.G.C.D.$ នៃ a និង b កត់ត្រាដោយ $\Delta(a,b)$ នោះ $P.P.C.M.$ របស់វា អាចកត់ត្រាដោយ $M(a,b)$ ។ បើ $P.G.C.D.$ នៃ a និង b កត់ត្រាដោយ $a \wedge b$ នោះ $P.P.C.M.$ របស់វា អាចកត់ត្រាដោយ $a \vee b$ ។*

តែចំពោះ $P.G.C.D.$ ក៏ដូច $P.P.C.M.$ មិនគ្រាន់តែ មានទ្រឹស្តីបទ ដែលថែងថា មាន នោះទេ តែត្រូវមាន ទ្រឹស្តីបទ ដែលអាចឲ្យយើង រកនូវ ចំនួន $P.P.C.M.$ នោះថែមទៀត។ គឺ ទ្រឹស្តីបទ ហ្គោស ។

ការស្នើ (IV, 8, 1).

a និង b គឺជា ចំនួនគត់ មិនសូន្យ ហើយ d ជា $P.G.C.D.$ នៃ a និង b ។ ដើម្បី ឲ្យចំនួន m ជា ពហុគុណ នៃ a និងជា ពហុគុណ នៃ b នោះ ត្រូវតែ និង គ្រាន់តែ m ជា ពហុគុណ នៃ $\frac{ab}{d}$ ។

1/ លក្ខណ្ឌ ត្រូវតែ (condition nécessaire)

m ជា ពហុគុណ នៃ $\frac{ab}{d}$ => m ជា ពហុគុណ នៃ a និងជា ពហុគុណ នៃ b ។

យើងតាង $a = da'$ ហើយ $b = db'$

ដោយ d ជា $P.G.C.D.$ នៃ a និង b ដូច្នេះ a' និង b' ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា

m ជា ពហុគុណ នៃ $\frac{ab}{d}$ => $m = k(\frac{ab}{d}) = k.(\frac{a}{d}).b = k.a'.b = (ka')b$

$m = (ka')b$ => <u>m ជា ពហុគុណ នៃ b</u>

$m = k(\frac{ab}{d}) = k.(\frac{b}{d}).a = k.b'.a = (kb')a$ => <u>m ជា ពហុគុណ នៃ a</u> ។

2/ លក្ខណ្ឌ គ្រាន់តែ (condition suffisante)

m ជា ពហុគុណ នៃ a និងជា ពហុគុណ នៃ b => m ជា ពហុគុណ នៃ $\frac{ab}{d}$

m ជា ពហុគុណ នៃ a => $m = k.a = k.d.a'$ (1)

m ជា ពហុគុណ នៃ b => $m = l.b = l.d.b'$ (2)

(1) និង (2) => $k.a' = l.b'$ => a' តួចែក $k.a'$ ក៏ជាតួចែក $l.b'$ ដែរ ។ ហើយ

ដោយ a' និង b' បឋមនឹងគ្នា ដូច្នេះ a' ជាតួចែកនៃ l => $l = a'p$

ដោយ (2) $m = l.d.b' = a'p.d.b' = p.d.a'.b' = p.(d.a').(\frac{d.b'}{d}) = \frac{p.a.b}{d}$

ដូច្នេះ $m = p.\frac{ab}{d}$ ដែល បង្ហាញថា <u>m ជា ពហុគុណនៃ $\frac{ab}{d}$</u> ។

សង្កេត

ដើម្បី បាន ពហុគុណ តូចបំផុត នោះគ្រាក់តែយក $p = 1$ ។ ដោយ m ជា ពហុគុណ នៃ a និងជា ពហុគុណ នៃ b ដូច្នេះ ៖

ពហុគុណ រួម តូចបំផុត នៃ a និង b គឺ $\frac{ab}{d}$ ។

អនុសាធ្យ(Corollaire).

***P.P.C.M.* នៃចំនួន *a* និង *b* គឺ ជាលទ្ធផល នៃ ផលគុណ $(a \times b)$ ចែក នឹង *P.G.C.D.* នៃចំនួន *a* និង *b* ។**

$$P.P.C.M.(a,b) = \frac{a \times b}{P.G.C.D.(a,b)}$$

ឧទាហរណ៍

នៅ A – ឧទាហរណ៍ទី១ $a = 156$, $b = 84$ ហើយយើង បាន

$P.G.C.D.(156,84) = 12$ ដូច្នេះ $P.P.C.M.(156,84) = \frac{156 \times 84}{12} = 1092$

ដោយអនុសាធ្យនេះ យើងអាចទាញយកនូវកម្មសិទ្ធិ នៃ *P.P.C.M.* ប្រហាក់ប្រហែល គ្នា នឹង កម្មសិទ្ធិ នៃ *P.G.C.D* ដូចតទៅនេះ៖

1/ *P.P.C.M.* ជាវិធីគណនា មាន លក្ខណៈ ត្រលប់ និង ផ្តុំ

2/ បើគេ គុណ ចំនួន a_i ទាំងអស់ ដោយ k នោះ *P.P.C.M.* ក៏គុណនឹង k ដែរ ។

ម្យ៉ាងទៀត *P.P.C.M.* នៃ n ចំនួន $a_1, a_2, \ldots, a_n$ គឺជាចំនួនដែល តូច ជាងគេ ក្នុងចំណោម ចំនួនដែលធំជាង ចំនួន $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ។

9.ចំនួន បឋម (Nombres premiers).

និយមន័យ តាមបូរាណ

ចំនួនគត់ មួយ ជាចំនួន បឋម បើកាលណា តួចែក នៃចំនួននោះ មានតែ ខ្លួនវា និង 1 តែប៉ុណ្ណោះ ។

ដូច្នេះ តាម និយមន័យនេះ ចំនួន 1 ក៏ជា ចំនួនបឋម ដែរ ។ តែនៅពេល ប្រើ ម្តងៗ គេត្រូវតែ បញ្ជាក់ថា ចំនួន បឋមដែលគេប្រើក្នុងទីនេះ គឺ ខុសពី 1 ។ ដូច្នេះ ដើម្បីសម្រួល គេសន្មត ថា ចំនួន 1 មិនមែនជាចំនួន បឋម ទេ ហើយការសន្មតនេះក៏ស្រប ទៅនឹង ទ្រឹស្តី នៃពិជគណិត (les théories algèbriques) ដែរ ។

ឧទាហរណ៍ ៖

ចំនួន $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ ជាចំនួន បឋម ។ យើងឃើញថា ចំនួន បឋម មានលក្ខណៈ មិន ស្មើទៀងទាត់ (irrégulier) ។

<u>ការស្មើ (IV,9,1)</u>

គ្រប់ចំនួន ដែល ខុសពី 0 និង 1 នោះយ៉ាងតិចណាស់ ក៏មានតួចែក បឋម មួយដែរ ។

<u>បង្ហាញ</u> បើចំនួន a ខុសពី 0 និង 1 នោះសំនុំ D_a នៃតួចែករបស់វា ខុសពី 1 គឺ ខុសពី សំនុំ ϕ ពីព្រោះ $a \in D_a$ ។ ដូច្នេះ D_a ដោយមាន a ជាធាតុបន្ថែមនោះ ក៏ មានចំនួនធាតុ មិនអនន្ត ។ ហើយមិនពិបាកទេ ថា ចំនួនតូចជាងគេ b នៅក្នុង D_a គឺជាចំនួនបឋម។

<u>ការស្មើ (IV,9,2)</u>

ចំនួន បឋម មានច្រើនជា អនន្ត Il existe une infinité de nombres premiers) ។

<u>បង្ហាញ</u>

ដើម្បីបង្ហាញថា ចំនួន បឋម មានច្រើនដល់អនន្ត យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $\forall n \in N$ ដែលគេឲ្យ យើងអាចរក ចំនួន បឋម b មួយបាន ដែល ធំជាង n ។

ដោយ n យើងបាន $n!$ ហើយ ដោយ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times .... \times n$ ដូច្នេះ តួចែក បឋម នៃ $n!$ ស្មើ នឹង n បើ n ជាចំនួន បឋម ។ តែចំពោះ តួចែក បឋម នៃ $1 + n!$ ត្រូវតែ ធំ ជាង n ជានិច្ច។ ឧបមាន $n = 5 \Rightarrow n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \Rightarrow$ តួចែក

បឋមនៃ $n!$ គឺ 2, 3, 5 ។ តែតួចែក បឋមនៃ $1 + n! = 1 + 120 = 121$ ដែលជាចំនួន បឋម ហើយ $121 > 5$ ។

រួមសេចក្តីទៅ កាលណា គេមាន ចំនួន n នោះគេក៏មាន ចំនួន បឋម មួយដែល ធំជាង n ។ ដោយចំនួន គត់ n មានច្រើនដល់ អនន្ត ដូច្នេះ ចំនួន បឋម ក៏មានច្រើនដល់អនន្តដែរ ។

បំបែកជា កត្តា បឋម

យើងចេញដំណើរ ពី ចំនួន a មួយដែល ខុសពី 0 និង 1។ យើងតាងដោយ x_1 តួចែក បឋម តូចជាងគេ នៃ a ហើយ p_1 គឺចំនួន p ដែលធំជាងគេដែលឲ្យ a ចែកដោយ x_1^p ដាច់ ។ យើងតាងដោយ a_1 ផលចែកដាច់ រវាង a និង $x_1^{p_1}$ ។ យើងអាចបើ $a_1 \neq 1$ ធ្វើ វិធីដដែលឡើងវិញ ចំពោះ a_1 គឺថា តួចែក បឋម ដែលតូចជាងគេនៃ a_1 គឺ x_2 ហើយ $x_2 > x_1$ ពីព្រោះ x_1 មិនចែក a_1 ។ ហើយយើងអាច សរសេរ ៖

$a = x_1^{p_1}.\ x_2^{p_2}.a_2$ ដោយ ចំនួន a_2 ចែកដោយ x_2 មិនដាច់ ។ ហើយគេ ធ្វើ វិធីដដែលឡើងវិញ ចំពោះ a_2 ហើយតែរបៀបនេះ រេះតែ តៗទៅ ។ តែដោយ ស្វ៊ីត a_i ចុះជានិច្ច នោះ នៅពេលណាមួយនៃវិធីដដែលៗនេះ ផលចែកនោះត្រូវតែ ស្មើនឹង 1 ។ យើងអាចសរសេរដូចតទៅនេះ ដោយសន្មត ថា $a_{k+1} = 1$ ៖

$a = x_1^{p_1}.a_1$

$a_1 = x_2^{p_2}.a_2$

………

$a_i = x_{i+1}^{p_{i+1}}.a_{i+1}$

….

$a_{k-1} = {x_k}^{p_k}.\, a_k$

$a_k = {x_{k+1}}^{p_{k+1}}.\, a_{k+1}$ ដោយគុណ តួ ខាងឆ្វេង សញ្ញា = ជាមួយគ្នា ហើយ គុណ តួខាងស្តាំ សញ្ញា = ជាមួយគ្នា នោះយើងបាន បន្ទាប់ពីលប់តួ ដូចគ្នា៖

$a = {x_1}^{p_1}.{x_2}^{p_2} \ldots\ldots {x_k}^{p_k}.{x_{k+1}}^{p_{k+1}}.\, a_{k+1}$ ហើយដោយ $a_{k+1} = 1$ នោះយើងបាន

$\boldsymbol{a = {x_1}^{p_1}.{x_2}^{p_2} \ldots\ldots {x_k}^{p_k}.{x_{k+1}}^{p_{k+1}}}$ ដោយ $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ ។

<u>ឧទាហរណ៍</u> យើងយក $a = 504$ ។យើងចែក 504 ជាមួយនឹងចំនួនបឋម ពី តូច ទៅ ធំ :

$504 = 2 \times 252$

$252 = 2 \times 126$ } $504 = 2^3 \times 63 \;\Leftrightarrow\; a = {x_1}^{p_1}.\, a_1$

$126 = 2 \times 63$

$63 = 3 \times 21$ } $63 = 3^2 \times 7 \;\Leftrightarrow\; a_1 = {x_2}^{p_2}.\, a_2$

$21 = 3 \times 7$

$7 = 7 \times 1$ => <=> $a_2 = {x_3}^{p_3}.\, a_3 \quad (a_3 = 1)$ ដូច្នេះ

$a = {x_1}^{p_1}.{x_2}^{p_2}.{x_3}^{p_3}$ គឺ

$504 = 2^3.\, 3^2.7$ ។

<u>ការស្មើ (IV,9,3)</u>

ចំនួន គត់ a ខុសពី 0 និង 1 អាចសរសេរ មានរាង ជាផលគុណតែមួយយ៉ាងគត់ គឺ $a = {x_1}^{p_1}.{x_2}^{p_2} \ldots\ldots {x_n}^{p_n}$ នៃស្វ័យគុណ នៃចំនួនបឋមមិនដូចគ្នា $x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots x_n$ ។

ការបំបែកជា កត្តាបឋម ឲ្យនូវ របៀបមួយងាយស្រួល ដើម្បីនឹងរក P.G.C.D. និង

P.P.C.M. ដោយមិនចាំបាច់ប្រើ ក្បួនដោះស្រាយ អឺគ្លីត ។ ហើយដោយ របៀបនេះ យើង អាច បានការស្នើ ដូចតទៅនេះ ៖

<u>ការស្នើ (*IV*, 9, 4)</u>

បើ ចំនួន គត់ a និង b ជាចំនួនគត់ បឋម នឹងគ្នា នោះ a^n និង b^n ក៏ បឋម នឹងគ្នា គ្រប់ ចំនួន n $(\forall n)$ ។

(គេអាច បង្ហាញ ដោយប្រើ ទ្រឹស្តីបទ ហ្គោស តែម្តង ក៏បានដែរ)

================= ចប់ មេរៀន នៃជំពូក *IV* ==================

*

លំហាត់

IV-1. ចូររកចំនួនស៊ីត ដែលកើនជានិច្ច ដោយមានកម្រិតយ៉ាងតឹង *suites strictement croissantes*) និង មានប្រវែង p ហើយដែលគេ ទាញយកពីស៊ីត $1, 2, 3, \ldots. n$?

<u>ចម្លើយ</u>: C_n^p [ហេតុ អ្វីបានជាមិន យក A_n^p ? ពីព្រោះ ថាបើ $p = 3$ នោះ ស៊ីត កើន $5, 6, 7$ តែមួយ បើយកមកតម្រៀប វិញមានទៅដល់ 3! ស៊ីត គឺ 6 ស៊ីត គឺ (5, 6, 7) (5, 7, 6), (6, 5, 7), (6, 7, 5), (7, 5, 6), (7, 6, 5) ។ យើងបានដឹង ហើយ ថា $p!\ C_n^p = A_n^p$] ។

IV-2. តើ មាន ចំនួន គត់ ប៉ុន្មាន ដែល អាចសរសេរ ដោយ ប្រើ យ៉ាងច្រើន p លេខ ក្នុង ប្រព័ន្ធបាត k (système à base k) ។

ចម្លើយ :

ដោយយើងធ្លាប់តែសរសេរ ចំនួនគត់ ក្នុង ប្រព័ន្ធដេស៊ីមាល (បាត 10) ដែលមាន លេខទាំងអស់ 10 គឺ $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ នោះបើយើងសរសេរ ចំនួនគត់ ដោយប្រើយ៉ាងច្រើន 3 លេខ តើ មានចំនួន គត់ ប៉ុន្មាន ? យើងឃើញថាមាន ចំនួន ៖

0, 1, 2, 3, 4, 5, …, 9, 10, 11, …….,99,100, 101, 102, …….,999 ។ ដូច្នេះ មាន 1000 ចំនួន គត់ ឬ 10^3 (ដោយរាប់ ទាំងចំនួន 0 ផងដែរ) ។ ឥឡូវបើយើងត្រឡប់មក ប្រព័ន្ធបាត k វិញ របៀបរកក៏ដូចតែ

គ្នាដែរ ។ បើចំនួន អាចសរសេរដល់ p ខ្ទង់ ៖

1	2		$p-1$	p
k	k	……………… …	k	k

ទាំងអស់ មាន p ខ្ទង់ ហើយ មួយខ្ទង់ៗ យើងអាច យកលេខណាមួយ ក្នុងចំណោម លេខទាំង អស់មាន k លេខខុសគ្នា ។ ដូច្នេះ បើយើងគិត ជា ចំលាស់ យើងបាន ចំនួនគត់ ដែលអាចសរសេរបាន គឺ $k \times k \times k \times \ldots \times k = k^p$ ។ ចូរសង្កេត ថា ចំនួននេះ ក៏ស្មើ នឹងចំនួន ពាក្យ ដែលមាន p តួអក្សរ យ៉ាងច្រើន នៃ

ភាសា ដែលសរសេរ ដោយ k តួអក្សរ ។

IV-3. ចូររក ចំនួន នៃចំនួគត់ ដែលអាចសរសេរបាន ដោយប្រើ p លេខយ៉ាងច្រើន ហើយ លេខខុសៗពីគ្នា (គេសន្មតថា $p \leq k$)។

ចម្លើយ :

1	2		$p-1$	p
k	$k-1$	…………….. …	k - $(p-2)$	k- $(p-1)$

ដើម្បីលេខខុសពីគ្នា ពីមួយទៅមួយ នោះលេខ ដែល ប្រើរួចហើយ ត្រូវ ដកចេញ

ដូច្នេះ ចំនួនលេខ ចុះ ពី k ទៅ $k-1$, ហើយ ពី $k-1$ ទៅ $k-2$, ….

ហើយចំនួនដែលត្រូវរកគឺ ស្មើនឹង ៖ $k(k-1)(k-2)\ldots..[k-(p-1)]$

$= k(k-1)\ldots.(k-p+1) = A_k^p$ ។

IV-4. តើគេអាច បង្កើត បានជាគូ (x, y) មិនតម្រៀប ហើយជាតុមិនចាំបាច់ខុសគ្នាទេ បានប៉ុន្មាន គូ បើគេឲ្យ n ជាតុ ។

ចម្លើយ

(x, y) មិនតម្រៀប បានន័យថា $(x, y) = (y, x)$ => ដូច្នេះ រាប់ តែមួយ គូ

ជាតុមិនចាំបាច់ខុសគ្នាទេ គឺថា (x, x) ក៏រាប់ជា មួយគូ ដែរ ។

យើងតាងដោយ $N1$ ចំនួនគូ ដែល ជាតុដូចគ្នា គឺ (x, x) => $N1 = n$ ។

យើងតាងដោយ $N2$ ចំនួនគូ ដែល ជាតុខុស គ្នា គឺ (x, y) ហើយ $x \neq y$ ។

ដូច្នេះ $N2 = C_n^2$ (ពីព្រោះ ក្នុង បន្សំ គេអត់គិត លំដាប់ ទេ) ។

ដូច្នេះ ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ ៖ $N1 + N2 = n + C_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}}$ ។

IV-5. នៅក្នុងស្បោង មួយ មាន ដុំមូល ឬ ប៊ូល (boule) ដែលមានលេខរៀង ពី 1 ទៅ n

($n \geq 2$)។ គេ ទាញយក ប៊ូល ទី១ បន្ទាប់មក ប៊ូល ទី២ (ដោយ មិនបាន ដាក់ ប៊ូល ទី ១ ទៅក្នុង ស្បោងទេ)។ ចូររក ប្រូបាប ៖

1°/ ដើម្បី ប៊ូលទាំងពីរ ចេញតាម លំដាប់ នៃលេខរៀង របស់ខ្លួន ។

2°/ ដើម្បី ប៊ូលទាំងពីរ មានលេខរៀង ជាប់គ្នា ។

ចម្លើយ

ចំនួន ករណីអាច មាន $n \times (n-1) = n(n-1)$

ចំពោះ សំនួរ ទី ១ ចំនួន ករណីស្រប គឺ C_n^2 ពីព្រោះក្នុង ការ បន្សំ 2 ធាតុ ធាតុទាំង ពីរ ខុសគ្នាជានិច្ច ដូច្នេះ យើងអាចរៀបប៊ូលទាំងពីរ តាមលេខរបស់វាបាន។

តាមរូបមន្ត $C_n^2 = \frac{n!}{2!\ (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$ => ប្រូបាប $p_1 = \frac{n(n-1)}{2} \Big/ n(n-1) = \frac{1}{2}$

សង្កេត

យើងអាច រក ចំនួនករណីស្របដោយ របៀប មិនចេះ រូបមន្ត បន្សំ ៖

គូ ទាំងឡាយ នៃករណីស្របមាន៖

$(1,2),\ (1,3), (1,4), (1,5), \dots\dots\dots. (1,n)$ => ដូច្នេះ មាន $(n-1)$ គូ

$(2,3)\ , (2,4), (2,5), \dots\dots\dots\dots\dots\ (2,n)$ => ដូច្នេះ មាន $(n-2)$ គូ

$(3,4)\ , (3,5), (3,6) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (3n)$ => ដូច្នេះ មាន $(n-3)$ គូ

…………………………………………………………………………………………..

$((n-2), ((n-1)),\ ((n-2), n)$ => ដូច្នេះ មាន 2 គូ

$((n-1), n)$ => ដូច្នេះ មាន 1 គូ

ដោយបូក ចំនួន គូ ទាំងអស់ $= (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1$

$$= \frac{(n-1)\ [(n-1)+1]}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$$

ចំពោះ សំនួរ ទី ២

ប៊ូលទាំងពីរ មានលេខរៀង ជាប់គ្នា ដូច ជា ៖

(1,2) ឬ (2,1)

(2,3) ឬ (3,2)

(3,4) ឬ (4,3)

……………………..

$((n-1), n)$ ឬ (n, (n − 1))

ដល់បូក ទៅ ជួរ ទី ១ មាន $(n-1)$ គូ   ហើយ ជួរ ទី ២ ក៏មាន $(n-1)$ គូ ដែរ

ដូច្នេះ ចំនួនករណី ស្រប ទាំងអស់ មាន : $(n-1) + (n-1) = 2(n-1)$

ប្រូបាប $p_2 = \dfrac{2(n-1)}{n(n-1)} = \dfrac{2}{n}$ ។

IV-6. នៅក្នុងស្បោង មួយ មាន ដុំមូល ឬ ប៊ូល (boule) 10 ដែលមានលេខរៀង ពី 0 ទៅ 9 ។ គេ ទាញយក n ប៊ូល   ដោយ ទាញម្តង ប៊ូលមួយ ហើយដាក់ទៅវិញ មុននឹង ទាញយកប៊ូលដែលជាបន្ទាប់។ គេធ្វើរបៀបនេះ n ដង ។ នេះក៏ដូចជា គេ ទាញយក n ប៊ូល   ពី n ស្បោង ដែល ដូចគ្នា   ដោយក្នុងស្បោង នីមួយៗ គេយក ប៊ូលតែមួយគត់។ គេតាងដោយ x_k លេខ នៃប៊ូលទី $k^{ième}$ ហើយដោយ x ចំនួនដេស៊ីមាល $0, x_1x_2x_3\ldots x_n$ ។ ចូររក ប្រូបាប ដែលឲ្យ x បំពេញ លក្ខខណ្ឌ $a \le x \le b$ ដោយ a និង b ជាចំនួនដេស៊ីមាល ដែល $10^n a$ និង $10^n b$ ជាចំនួនគត់ ហើយ បំពេញ $0 \le a \le b < 1$ ។

ចម្លើយ

ដើម្បី យល់ប្រធានបទនេះ ខ្ញុំសូមពន្យល់ដូចតទៅនេះ៖

ចំនួន ដេស៊ីមាល ដូចជា 2,36 ឬ 0,570 ។ ដូច្នេះ $10^3(0,570) = 570$ ដែលជាចំនួនគត់ ។ ចំពោះចំនួន អសនិទាន(*nombre irrationnel*) ដូចជា $\sqrt{2}$ នោះមិនមែន ជាចំនួន ដេស៊ីមាលទេ ពីព្រោះ គេស្គាល់តែចំនួនប្រហាក់ប្រហែលនៃ $\sqrt{2}$ តែប៉ុណ្ណោះ ដូចជា 0,1416 ជាដើម ។ ហើយដែលហៅថា ចំនួនពិត ជាចំនួន ដេស៊ីមាលផង និង ជាចំនួន អសនិទានផង។

នៅក្នុងចំណោទនេះ បើយើងយក $n = 3$

$a = 0,081$, $b = 0,561$ => $10^3 a = 81$, $10^3 b = 561$

10	10	10
x_1	x_2	x_3

$x = 0, x_1 x_2 x_3$ បើ $x_1 = 5$, $x_2 = 7$, $x_3 = 0$ នោះ $x = 0,570$ ហើយ x មិននៅក្នុងចន្លោះ $[a, b]$ ទេ ពីព្រោះ $0,570 > 0,561$ ។

ឥឡូវនេះ យើងមករកចម្លើយ នៃ ចំណោទនេះ ៖ ដោយ មាន n ស្បោង ហើយស្បោងនីមួយៗ មាន 10 ប៊ូល នោះចំនួន ករណីអាច គឺ 10^n ។

ចំពោះ ករណីស្រប យើងឃើញដោយ ឧទាហរណ៍ ខាងលើ គឺជាចំនួនគត់នៅក្នុងចន្លោះ $[10^n a, 10^n b]$។ ដូច្នេះ ចំនួនករណីស្រប ស្មើនឹង $(10^n b - 10^n a) + 1$[13]។

ដូច្នេះ ប្រូបាប

$$p = \frac{(10^n b - 10^n a) + 1}{10^n} \quad (1)$$

ឬ

$$p = (b - a) + \frac{1}{10^n} \quad (2)$$

ដោយ $0 \le a \le b < 1$ ។

សង្កេត

[13] ត្រូវបូកនឹង 1 ពីព្រោះជាចំនួនគត់ ដូចជា ចន្លោះ [5, 8] ត្រូវមានចំនួនជាតុ (8 – 5) +1 = 4។ តែបើជា ចំនួនពិត វិញ $(a \in R, b \in R)$ នោះ គឺ $(a - b)$ គ្រប់គ្រាន់ហើយ ។

ឧទាហរណ៍-E1

យើងអាចប្រើ រូបមន្ត (1) ចំពោះ $n = 1$ ដូច ឧទាហរណ៍ តទៅនេះ ៖

នៅក្នុងស្បោង មួយ មាន ដុំមូល ឬ ប៊ូល (boule) 10 ដែលមានលេខរៀង ពី 0 ទៅ 9 ។

គេ ទាញយក ប៊ូល មួយចេញមក ហើយ គេមើលលេខ របស់វា ។

គេ កំណត់សំនុំ A, $A1$, $A2$, $A3$ ដោយ ៖

$A = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$; $A1 = \{ 0,1,2 \}$; $A2 = \{3,4,5,6,7 \}$; $A3 = \{ 8,9 \}$ ។

ចូររក ប្រូបាប p ដើម្បី លេខ នៃប៊ូលដែលទាញចេញពីស្បោងនោះ នៅក្នុង សំនុំ A ។

ចូររក ប្រូបាប $p1$ ដើម្បី លេខ នៃប៊ូលដែលទាញចេញពីស្បោងនោះ នៅក្នុង សំនុំ $A1$ ។

ចូររក ប្រូបាប $p2$ ដើម្បី លេខ នៃប៊ូលដែលទាញចេញពីស្បោងនោះ នៅក្នុង សំនុំ $A2$ ។

ចូររក ប្រូបាប $p3$ ដើម្បី លេខ នៃប៊ូលដែលទាញចេញពីស្បោងនោះ នៅក្នុង សំនុំ $A3$ ។

ចម្លើយ

ដើម្បី រកប្រូបាប យើងរក ចំនួន ករណីអាច និង ចំនួន ករណីស្រប ។ ចំពោះ ចំនួន ករណី អាច គឺ ស្មើ និងចំនួន លេខនៃ ប៊ូលទាំង 10 ។ ដូច្នេះ ចំនួនករណីអាច = 10 ។

រកប្រូបាប p

ដោយ លេខ ដែល ទាញចេញមក សុទ្ធតែមាននៅក្នុង សំនុំ A ទាំងអស់ ដូច្នេះ ចំនួនករណីស្រប ក៏ ស្មើនឹង ចំនួនធាតុនៃ សំនុំ A ដែរ $= 10$ => $p = \frac{10}{10} = 1$ ។

រកប្រូបាប $p1$

ដោយ លេខ ដែល ទាញចេញមក ទាល់តែនៅក្នុង សំនុំ $A1$ ទើប បាន ថាត្រូវ ។ ដូច្នេះ ចំនួនករណីស្រប គឺ ស្មើនឹង ចំនួនធាតុនៃ សំនុំ $A1$ $= 3$ => $p_1 = \frac{3}{10}$ ។

រកប្រូបាប $p2$

ដោយ លេខ ដែល ទាញចេញមក ទាល់តែនៅក្នុង សំនុំ $A2$ ទើប បាន ថាត្រូវ ។ ដូច្នេះ

ចំនួនករណីស្រប គឺ ស្មើនឹង ចំនួនធាតុនៃ សំនុំ $A2 = 5$ => $p_2 = \frac{5}{10}$ ។

<u>រកប្រូបាប $p3$</u>

ដោយ លេខ ដែល ទាញចេញមក ទាល់តែនៅក្នុង សំនុំ $A3$ ទើប បាន ថាត្រូវ ។ ដូច្នេះ

ចំនួនករណីស្រប គឺ ស្មើនឹង ចំនួនធាតុនៃ សំនុំ $A3 = 2$ => $p_3 = \frac{2}{10}$ ។

<u>សង្កេត</u>

1/ $p = p_1 + p_2 + p_3$

2/ យើងចង់ បកស្រាយ រូបមន្ត (1) ខាងលើ កាលណា $n = 1$ ដើម្បី ប្រៀបធៀប ទៅនឹង ឧទាហរណ៍-E1 ៖

ចំពោះ $n = 1$ នោះ រូបមន្ត (1) ទៅជា $pf = \frac{(10\,b - 10a) + 1}{10}$ **(1-A)** ។

ហើយ $x = 0, x_1x_2x_3\ldots x_n$ ទៅជា $x = 0, x_1$ ។

បើលេខ ដែលចេញនៃប៊ូលគឺ លេខ 4 នោះ $x = 0{,}4$ ហើយ

$10x = 10\,(0{,}4) = 4$ ដែលជាចំនួនគត់។ ម្យ៉ាងទៀត $0 \le a \le b < 1$ =>

$10a$ និង $10b$ ជាចំនួនគត់ ។ ហើយ $a \le x \le b$ => $10a \le 10x \le 10b$ ។

ដូច្នេះ ចំនួនគត់ $10x$ នៅក្នុងចន្លោះ $[\,10a\,,\ 10b\,]$ ។ បើយើងយក សំនុំ $A2$

$A2 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ យើងឃើញថា $10x = 4$ ជាធាតុ នៃ $A2$ ។

ដោយ $A2$ ជា សំនុំរង នៃ ចំនួនគត់ យើងអាច ទុក $A2$ ជាចន្លោះបិទ មួយនៅក្នុង សំនុំ នៃ ចំនួនគត់ N។ ដូច្នេះ យើងអាច តាង ចន្លោះបិទនោះដោយ $I2 = [3\,,\ 7]$ ហើយ បើយើង យក រូបមន្ត (1-A) មក អនុវត្ត ដើម្បី នឹងរកប្រូបាប នោះយើងបាន ចំពោះ $I2$ នេះ ជា $pf = \frac{(10\,b - 10a) + 1}{10} = \frac{(7-3)+1}{10} = \frac{5}{10} = p2$ (ប្រូបាប ដែលយើង បានរកឃើញ រួចម្តងមកហើយ ដោយ មិនប្រើ រូបមន្ត (1-A) នេះ ។ ចំពោះ សំនុំឯទៀតៗ

ដូចជា A, $A1$ ឬ $A3$ ក៏ ប្រើរបៀបដូចគ្នា នឹងសំនុំ $A2$ នេះដែរ គ្រាន់តែយក ចន្លោះ $I, I1$ ឬ $I3$ ខុសគ្នា ។

យើងអាច បង្រើក ទៅចន្លោះ នៅក្នុង R (ចំនួនពិត) បាន ចំពោះ រូបមន្តនេះ ក្នុងការរក ប្រូបាប ។ ឧបមាដូចជា គេឲ្យ ចំនួន ពិត x , $0 \leq x \leq 1$ ហើយនិង ចន្លោះ $I = [a, b]$ ដោយ $0 \leq a \leq b \leq 1$ ។ ចូរ រក ប្រូបាប p ដើម្បី x នៅក្នុងចន្លោះ I ។ ចម្លើយ $p = b - a$ [14]។

IV-7. នៅក្នុងស្បោង មួយ មាន ប៊ូល 10 មានលេខ ពី 1 ទៅ 10។ គេ យកប៊ូលមួយ ចេញមក គេកត់លេខវា ហើយ គេដាក់ប៊ូលនោះចូលក្នុង ស្បោងវិញ ទើប គេយក ប៊ូលមួយ ចេញមកទៀត ហើយគេកត់លេខវា ដូចលើកទី១ដែរ ។

1/ ចូរ រក ប្រូបាប ដើម្បី ឲ្យ y ដែលជា ផលបូក នៃ លេខរបស់ ប៊ូលទាំង ពីរ ស្មើនឹង ចំនួន x ដែល គេឲ្យ ។

2/ គូក្រាប ដោយ ដាក់នៅ អាប់ស៊ីស ចំនួន x ហើយ ដាក់នៅ អរដោនេ ចំនួន y ។

3/ ចូរ ពន្យល់ថា ហេតុអ្វី ក៏ ក្រាបនោះ ធ្ងុះ ជៀបនឹង បន្ទាត់ $x = 11$ ។

<u>ពន្យល់និង ចម្លើយខ្លះ</u>

ដោយប៊ូល មាន 10 ពីលេខ 1 ទៅលេខ 10 ហើយគេ ទាញយក២លើក ដោយដាក់ប៊ូល ទៅក្នុងស្បោងវិញ មុននឹងទាញយកប៊ូលទី២ ។ ឧបមា យើង តាងដោយ x_1 លេខរបស់ប៊ូលទី១ និង x_2 លេខរបស់ប៊ូលទី២ នោះ <u>ចំនួនករណី អាច</u> មាន $10 \times 10 =$ 100 ពីព្រោះ x_1 ក៏ដូច x_2 អាចយក លេខ ពី 1 ទៅ 10 ដូចគ្នា ។

---

[14] ចូរសង្កេត ចន្លោះ $I = [3, 7]$ នៅក្នុង N(សំនុំនៃចំនួនគត់) និង ចន្លោះ $I = [3, 7]$ នៅក្នុង R (សំនុំនៃ ចំនួនពិត) តើខុសគ្នា ដូចម្តេច ? នៅក្នុង N ចំនួនគត់ 3 នៅក្នុង I តែ ចំនួន $3,00000001$ មិន នៅ ក្នុង I ទេ ។ តែបើគិតជានៅក្នុង R វិញ នោះ ចំនួន $3,00000001$ ជដែលនេះនៅក្នុង I ។

ដោយ $x = x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ ដើម្បី រក ចំនួនករណី ស្រប និង ប្រូបាប y យើងអាច ធ្វើ តារាង ដូចខាងក្រោមនេះ ដោយសង្កេតថា $2 \leq x \leq 20$ ក្រៅពីនេះ $y = 0$ ៖

x	ករណីស្រប	ចំនួនស្រប	y		x	ករណីស្រប	ចំនួនស្រ	y
1	0	0	0		12	(10,2), (9,3),(8,4), (7,5), (6,6) ,..	9	9/100
2	(1,1)	1	1/100		13	(10,3), (9,4), (8,5),(7,6), …	8	8/100
3	(1,2), (2,1)	2	2/100		14	(10, 4), (9,5), (8, 6), (7,7),..	7	7/100
4	(1,3), (2,2),(3,1)	3	3/100		15	(10,5), (9,6), (8, 7), (7, 8), ..	6	6/100
5	(1,4),(2,3),(3,2), …	4	4/100		16	(10,6), (9,7), (8,8), …	5	5/100
6	(1,6), (2,4), (3,3), ..	5	5/100		17	(10,7), (9,8), ..	4	4/100
7	(1,7), (2,5), (3,4), ..	6	6/100		18	(10, 8), (9, 9), (8,10)	3	3/100
8	(1,7), (2,6), (3,5), ..	7	7/100		19	(10,9), (9, 10)	2	2/100
9	(1,8), (2,7), (3, 6),	8	8/100		20	(10, 10)	1	1/100
10	(1, 9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5), ..	9	9/100					
11	(1, 10), (2,9), (3,8),(4,5), (5,6), (6,5), ….	10	10/100					

*

*

*

*

*

<u>*តារាងអថេរ (tableau de variation)*</u>

ដើម្បី នឹងគូក្រាប យើង ធ្វើ តារាងអថេរ នៃ អនុគមន៍ $y = f(x)$ ។ ដោយប្រើ តារាងនេះ យើង អាចកំណត់ អនុគមន៍ f បាន ។

x	1	2	10	11	12		20 21
y	0	1/100	9/100	10/100	9/100		1/100 0

តារាង អថេរ នេះ បានមកពី តារាង ខាងលើ ដែល មាន ចំនួន x និង y ហើយនិង ករណី ស្រប និង ចំនួន ស្រប។ ចំពោះ ករណីស្រប បើ (x_1, x_2) ជា ករណីស្រប នោះ (x_2, x_1) ក៏ជា ករណីស្របដែរ ពីព្រោះ លេខបូក មានលក្ខណៈ ត្រលប់ គឺថា បើ $x = x_1 + x_2$ នៅពេលនោះ ក៏ x ស្មើនឹង $x_2 + x_1$ ដែរ ។ មានន័យថា មានករណីស្រប យ៉ាងហោច២ បើកាលណា $x_1 \neq x_2$ ។ នៅក្នុង តារាងខាងលើ ខ្ញុំមិនបាន សរសេរ ករណីស្រប ទាំងអស់ទេ តែចំពោះ ចំនួនស្រប នោះ ត្រឹមត្រូវហើយ ។

ដោយ ករណីស្រប យើងបាន ឲ្យ x គ្រប់ចំនួន ដែល x អាចយក នោះប្រូបាប ទាំងអស់ នៅក្នុង តារាង នេះ បើយើង បូក ទាំងអស់ទៅ ត្រូវ ស្មើ នឹង 1 ។ ចូរពិនិត្យ ដោយ ខ្លួនឯងទៅ ។ ដល់ គូក្រាបបានហើយ នោះយើងនឹងឃើញថា បន្ទាត់ ពីរ មាន រៀង ដូច តារាង អថេរដែរ ។ យើងអាច បញ្ជាក់ ការសង្កេតនេះ ដោយ រក សមីការ នៃ បន្ទាត់ ទាំងពីរនោះ ដូច តទៅ ៖

យើងដឹងហើយថា សមីការ នៃបន្ទាត់មាន ទម្រង់ $y = ax + b$។ ហើយ បើយើងដឹង កូអរដោនេ នៃ ពីរ ចំណុច A និង B នោះយើងអាច រក a និង b នៅក្នុង សមិការ នេះបាន ។

a / សមីការ $y = ax + b$ ចំពោះ $1 \le x \le 11$

យើងយក ចំណុច $A(1, 0)$ និង ចំណុច $B(10, 9/100)$

$y = ax + b$ => ចំពោះ ចំណុច A(1, 0) យើងបាន ៖ 0 = $a + b$ => $a = -b$

ចំពោះ ចំណុច B(10, 9/100) យើងបាន ៖ 9/100 = $10a + b$ =>

9/100 = 10 $a - a$ = 9a => $a = 1/100$ និង $b = -1/100$ ។ ដូច្នេះ $y = \frac{1}{100}(x-1)$ (F1)

យើងឃើញថា ចំណុច $C(11, 10/100)$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ នឹង សមីការ (F1) នេះដែរ ។

<u>b / សមីការ $y = ax + b$ ចំពោះ $12 \le x \le 21$</u>

យើងយក ចំណុច D(12, 9/100) និង ចំណុច E(20, 1/100)

$y = ax + b$ => ចំពោះ ចំណុច D(12, 9/100) យើងបាន ៖

9/100 = $12a + b$ => $b = -12a + \frac{9}{100}$

ចំពោះ ចំណុច E(20, 1/100) យើងបាន ៖

1/100 = $20a + b$ => $b = -20a + \frac{1}{100}$

$-12a + \frac{9}{100} = -20a + \frac{1}{100}$ =>

$a = -\frac{1}{100}$ ហើយ $b = \frac{21}{100}$

ដូច្នេះ $y = \frac{1}{100}(-x + 21)$ (F2)

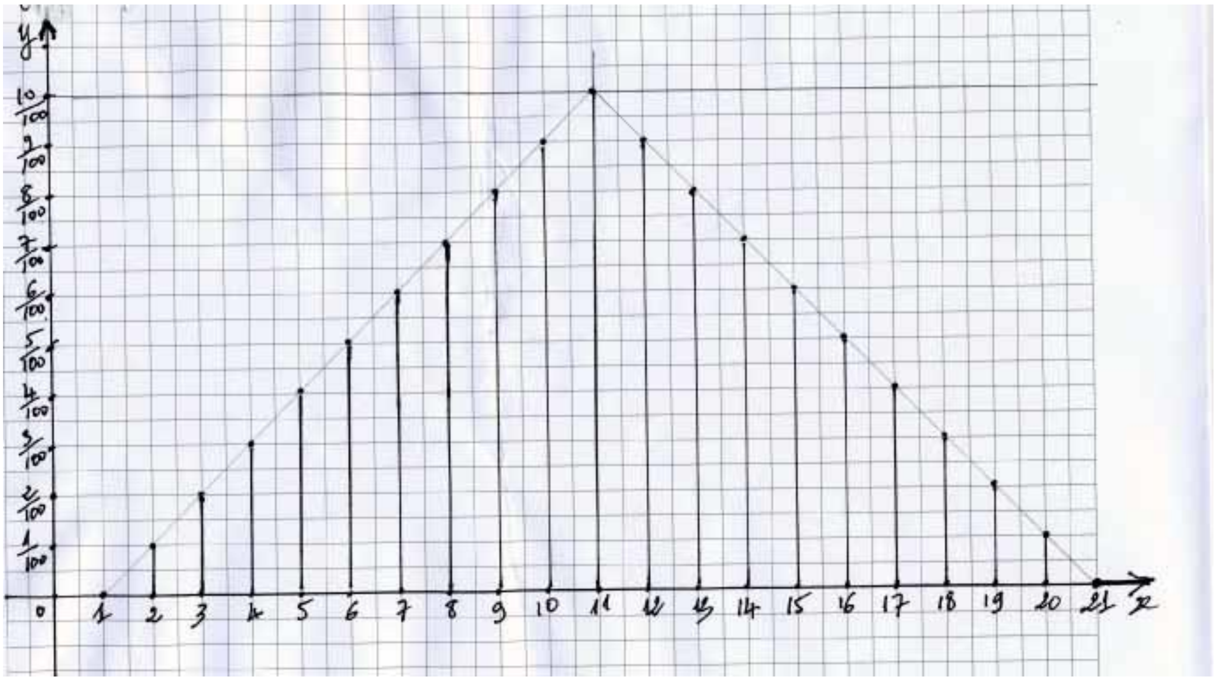
ដូច្នេះ ច្បាប់ប្រូបាប នៃ ព្រឹត្តការណ៍នេះ ជា អនុគមន៍ f កំណត់ ដូចតទៅនេះ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}(x-1) & \text{បើ } 1 \le x \le 11 \\ \frac{1}{100}(-x+21) & \text{បើ } 12 \le x \le 21 \\ 0 & \text{ក្រៅពីនោះ} \end{cases}$$

មុននឹងគូ ក្រាប នៃ អនុគមន៍ f យើង ស្រង់ ដាក់ក្នុង តារាងខាងក្រោមនេះ នូវ តម្លៃ អថេរ x និង ប្រូបាប y ដែលស្របជាមួយ ដែលមានក្នុង តារាង មាន ករណីស្រប ៖

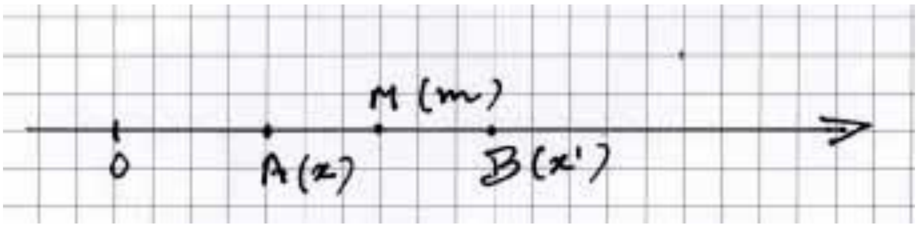
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
y'[15]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

15 ដោយ $y = y'/100$



នេះ គឺ ដ្យាក្រាមជាដំបង (diagramme en bâtons) នៃច្បាប់ ប្រូបាបខាងលើ ។ យើងសង្កេតឃើញថា បន្ទាត់ $x = 11$ បន្ទាត់ឆ្លុះ នៃ ដ្យាក្រាមនេះ។ ដើម្បីនឹងបង្ហាញ ថា បន្ទាត់ $x = 11$ ជាបន្ទាត់ឆ្លុះនៃ ដ្យាក្រាម យើងប្រើ រូបមន្ត ដូចតទៅ ៖

បើចំណុច $M\,(m, 0)$ មាន កូអរដោនេ $(m, 0)$ បើនៅកណ្ដាល ចំណុច $A(x, 0)$ និង $B(x', 0)$ នោះគេបាន $m = \frac{x+x'}{2}$



យើបាន $x + x' = \overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OM} + \overline{MA} + \overline{OM} + \overline{MB} = 2\,\overline{OM} = 2m$

(ពីព្រោះ $\overline{MA} + \overline{MB} = 0$) => $m = \frac{x+x'}{2}$ ។ គេថា អាប់ស៊ីស នៃចំណុចកណ្ដាល ស្មើ នឹង ពាក់កណ្ដាល ផលបូក នៃ អាប់ស៊ីស នៃចំណុចទាំងពីរ ខាងចុង ។ ដើម្បីបង្ហាញថា ដ្យាក្រាម ឆ្លុះ ធៀប នឹងបន្ទាត់ $x = 11$ យើងយក ចំណុចពីរ លើដ្យាក្រាម ៖

ចំណុចទី១ មានអាប់ស៊ីស $x1 \le 11$ => $f(x1) = \frac{1}{100}\,(x1 - 1)$

ចំណុចទី២ មានអាប់ស៊ីស $x2 \geq 11$ => $f(x2) = \frac{1}{100}(-x2+21)$

ដើម្បី ចំណុច ទាំងពីរ ឆ្លុះ គ្នា ទៅវិញទៅមក ទាល់តែ យ៉ាងហោច មាន កំពស់ ស្មើគ្នា គឺ

$f(x1) = f(x2) \Leftrightarrow \frac{1}{100}(x1-1) = \frac{1}{100}(-x2+21)$ =>

$x1 - 1 = -x2 + 21$ => $x1 + x2 = 22$ => $\frac{x1+x2}{2} = 11$ ។ ដោយ $x = 11$ ជា បន្ទាត់ ឆ្លុះ ដូច្នេះ ដោយរូបមន្ត ស្តីពីចំណុច កណ្តាលខាងលើនោះ យើង អាចសន្និដ្ឋាន ថា ដ្យាក្រាមជាដំបង នេះ ឆ្លុះ ធៀបនឹង បន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $x = 11$ ។

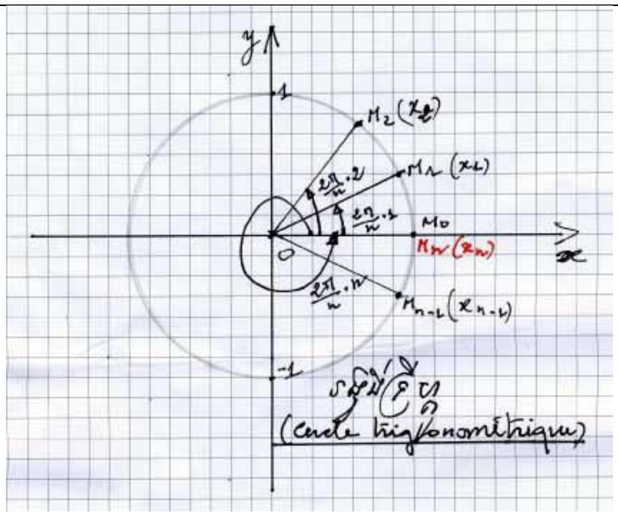
IV-8. គេឲ្យស៊ីត $x_1, x_2, x_3, \dots\dots, x_n$ ដែលមាន n ធាតុ ខុសគ្នាទាំងអស់ ។ គេហៅថា ពែមុតាស្យុងវង្វង់មូល (*permutation circulaire*) នៃស៊ីតនេះ គឺ ជា ពែមុតាស្យុង p កំណត់ដោយ $p(x_k) = x_{k+1}$ ចំពោះ $k < n$ ហើយ $p(x_n) = x_1$ ។

1/ ចូរបង្ហាញថា ផលគុណ p^n នៃ n ពែមុតាស្យុងវង្វង់មូល ជា បំផ្លែងឲ្យដដែល តាងដោយ អក្សរ I (*transformation identique*) ។ ដោយហេតុនេះ ចូរបង្ហាញថា ពែមុតាស្យុង $I, p, p^2, p^3, \dots\dots, p^{n-1}$ ផ្សំបានជា គ្រុបរងមួយ (*un sous – groupe*) នៃ គ្រុប នៃពែមុតាស្យុងទាំងឡាយ ទៅលើសំនុំ $E = \{x_1, x_2, \dots\dots, x_n\}$ ។

2/ ចំពោះ តួ x_k មួយ គេបានចំណុច M_k មួយ នៅលើ រង្វង់ ត្រីកោណមាត្រ មួយ (*cercle trigonométrique*) [មាន ផ្ចិត o និង កាំ $OM_k = 1$] កំណត់ដោយ $\widehat{Ox, OM_k} = \frac{2k\pi}{n}$ ៖ ដូច្នេះ គេបាន ការអនុវត្តន៍ ប៊ីសេចទីវ មួយពី E ទៅលើ ប៉ូលីហ្គូនស្មើជ្រុង មាន n ជ្រុង (*polygone régulier de n côtés*)។ ចូរបង្ហាញថា ពែមុតាស្យុង p^k (ផលគុណនៃ k ពែមុតាស្យុងវង្វង់មូល) ក៏ដូចជា ដំណើររិល នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ពីចំណុច M_i ទៅចំណុច M_{i+k} ដោយមុំ $\frac{2k\pi}{n}$ (*une rotation d'angle* $\frac{2k\pi}{n}$ *des sommets du polygone*) ។

<u>ពន្យល់ និង ចម្លើយខ្លះ</u>

Fig-1

	$x_1 \to M_1 \to (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{2\pi}{n} \times 1$ $x_2 \to M_2 \to (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_2}) = \frac{2\pi}{n} \times 2$ $x_3 \to M_3 \to (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_3}) = \frac{2\pi}{n} \times 3$ . . . . $x_{n-1} \to M_{n-1} \to (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_{n-1}}) = \frac{2\pi}{n}(n-1)$ $x_n \to M_n \to (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_n}) = \frac{2\pi}{n} \times n = 2\pi$

មុនដំបូង យើងត្រូវយល់ថាអ្វីទៅ ពែមុតាស្យុងវង្វង់មូល គឺ ពែមុតាស្យុង វិលមករក ជាតុដើមវិញ ។ ឧបមា $n = 4$ ហើយ យើងយកស៊ីត ៖ 2, 4, 6, 8 ។ ដូច្នេះ ពែមុតាស្យុងវង្វង់មូល p លើស៊ីតនេះ គឺ ៖ $p(2) = 4$; $p(4) = 6$; $p(6) = 8$; $p(8) = 2$ ។ ដូចយើងរត់ ពី បង្គោល លេខ 2 ទៅ ដល់ បង្គោល លេខ 4 ។ ហើយចេញពីលេខ 4 ទៅ លេខ 6 ។ ហើយចេញពី លេខ 6 ទៅ លេខ 8 ។ ហើយចេញពី លេខ 8 ត្រលប់មកលេខ 1 វិញ។ ដូច្នេះ រត់ មួយថ្ងៃវាល់ល្ងាច នៅតែវិល វល់ នៅតែមួយកន្លែង ។ យើងអាចទុក p ជាអនុគមន៍ កំណត់ ពី ស៊ីត ទៅ ស៊ីត ដដែល គឺថា ៖

$2 \to p \to 4 - p \to 6 \to p \to 8 \to p \to 2$ ឬ $p(p(p(p(2)))) = p(p(p(4))))$ ឬ

$p(p(p(4)))) = p(p(6))) = p(8) = 2 = I(2) \Rightarrow p^4 = I$ ។

<u>a/ យើងត្រូវបង្ហាញ $p^n = I$</u> ដោយ p មានល័ក្ខខ័ណ្ឌ $p(x_k) = x_{k+1}$ ចំពោះ $k < n$ ហើយ $p(x_n) = x_1$ (C1) ។

$p^n = I \iff p^n(x_1) = x_1$ ។

ដើម្បីបង្ហាញ យើង បង្ហាញ ដោយ រ៉េគារ៉ង់ លើ n ៖

$p(x_1) = x_2 \Rightarrow p(p(x_1)) = p(x_2)$ ឬ $p^2(x_1) = x_3 \Rightarrow$ យើងឃើញថា ស្វ័យគុណ 2 នៃ p^2 បូកនឹង សន្ទស្សន៍ (indice) 1 នៃ x_1 ស្មើនឹង សន្ទស្សន៍ (indice) 3 នៃ x_3

ដូច្នេះ យើង តាង រូបមន្ត មួយថា ៖

$p^n(x_1) = x_{n+1}$ (F1)

ដោយរូបមន្តនេះត្រូវ ចំពោះ $n = 2$ ពីព្រោះ $p^2(x_1) = x_3$ យើងសន្មតថា (F1) ត្រូវចំពោះ p^n (ស្វ៊ីត មាន n តួ)ហើយយើងត្រូវបង្ហាញ ថា p^{n+1} (ស្វ៊ីត មាន $n+1$ តួ) ក៏ត្រូវដែរ។

ដោយ (F1) $p^n(x_1) = x_{n+1} \Rightarrow p(p^n(x_1)) = p(x_{n+1})$ ឬ $p^{n+1}(x_1) = p(x_{n+1})$

ដោយ $n+1$ ជាចំនួន តួ ទាំងអស់នៃស្វ៊ីត ដូច្នេះ $p(x_{n+1}) = x_1$ តាមលក្ខខណ្ឌ នៃ p ។

ដូច្នេះ $p^{n+1}(x_1) = x_1 \iff p^{n+1} = I$ ។

b/ <u>ចូរបង្ហាញថា ពែមុតាស្យុង $I, p, p^2, p^3, \ldots\ldots, p^{n-1}$ ផ្សំបានជា គ្រុបរងមួយ (un sous – groupe) នៃគ្រុប នៃពែមុតាស្យុងទាំងឡាយ ទៅលើសំនុំ</u>

<u>$E = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$</u>

សូមរំលឹកឡើងវិញ អំពីនិយមន័យ របស់ គ្រុបរង (sous-groupe)

គេថា បំណែក H មួយនៃ គ្រុប G តាក់តែងផ្សំបានជា « គ្រុបរង » បើ ៖

1°/ $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

2°/ $x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$ ។

នៅទីនេះ $H = \{I, p, p^2, p^3, \ldots\ldots, p^{n-1}\}$ ហើយ $E = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$

<u>ត្រូវបង្ហាញថា ៖ $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$</u>

យើងយក $p^k \in H$ ដោយ $1 \le k \le n-1$ និង $p^n = I$

ដើម្បីរក ធាតុធ្លុះ $p^l \in H$ របស់ ធាតុ p^k យើងប្រើនិយមន័យ គឺ

$p^l \in H$ ជាធាតុ ធ្លុះ របស់ ធាតុ $p^k \in H$ <=> $p^l p^k = p^k p^l = I$

$p^l p^k = I \Rightarrow p^l p^k = p^n \Rightarrow p^{l+k} = p^n \Rightarrow l + k = n \Rightarrow l = n - k$

ដោយ $\left.\begin{array}{l} n < n + (n-1) \\ 1 \leq k \leq n-1 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow n - 1 \leq n - k < n + (n-1) - (n-1)$

ឬ $n - 1 \leq n - k < n \Rightarrow$

$1 \leq n - k \leq n - 1$ បើ $n \geq 2$ [16]។ ដូច្នេះ $p^{n-k} \in H$ ហើយធ្លុះ នឹង p^k ហើយ

ដោយលេខបូកមានលក្ខណៈត្រលប់ $l + k = k + l$ នោះ

$p^l p^k = I = p^{l+k} = p^{k+l} = p^k p^l \Rightarrow p^k p^{n-k} = p^{n-k} p^k = I$ ។

<u>ត្រូវបង្ហាញ ថា $x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$</u>

យើងយក ធាតុពីរក្នុង H : $p^k \in H$ និង $p^l \in H$ តើ $p^k p^l$ នៅក្នុង H ទេ ?

យើងដឹងថា $p^k p^l = p^{k+l} = p^m$ ដោយ $m = k + l$ ។

បើ $1 \leq m \leq n - 1$ នៅពេលនោះ $p^{\mathrm{m}} \in H \Rightarrow p^k p^l \in H$

បើ $m \geq n$ នៅពេលនោះ យើងធ្វើលេខចែក អឺគ្លីត នៃចំនួនគត់ យើងបាន

$m = nq + r$ ដោយ $r < n \Rightarrow p^m = p^{nq+r} = (p^n)^q p^r = I^q p^r = p^r$

ដោយ $1 \leq r \leq n - 1 \Rightarrow$ ដូច្នេះ $p^r \in H \Rightarrow p^m \in H \iff p^k p^l \in H$ ។

ដោយ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $1°$/ និង $2°$ បំពេញហើយ ដូច្នេះ H គ្រុបរង។

<u>សំនួរ ទី២</u>

ចំពោះសំនួរ នេះ ចូរ មើលរូប វង្វង់ ទ្រីហ្គូ ខាងលើ ។ ត្រូវមើលប្រធានបទឲ្យយល់ គឺថា ៖

ចំពោះ ស៊ីត ដែលមាន n ធាតុ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots.., x_n$ នោះ គេឲ្យ ៖

---

[16] ដោយ $1 \leq k \leq n - 1$ ដូច្នេះ បើ $n = 1$ នោះយើងបាន $1 \leq k \leq 0$ ដែលទៅមិនរួច ដូច្នេះ n ត្រូវតែ $n \geq 2$ ទើបស្របនឹង ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ។

$x_1 = \widehat{Ox,OM_1} = \frac{2\pi}{n} \times 1$ ដោយ M_1 ជាចំណុច នៅលើរង្វង់ ទ្រីហ្គូកំណត់ដោយ មុំ $\widehat{Ox,OM_1} = \frac{2\pi}{n} \times 1$ ។ ចូរសង្កេតថា ដើម្បីបាន $\frac{2\pi}{n}$ គេចែក រង្វង់ទាំងមូល ជា n ភាគស្មើគ្នា។ បើ យើងតាង M_0 ជាចំណុច លើរង្វង់ ដែលកាត់ដោយ អ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ នោះមុំ $\widehat{M_0OM_1} = (\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM_1}) = \frac{2\pi}{n}$ ។ ត្រូវសង្កេតថា មុំ នីមួយៗ មាន អ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ ជាជ្រុង រួម ក៏ដូចជា M_0 ជាចំណុចរួម នៃធ្នូទាំងអស់ដែរ ។ ដើម្បី ឆ្លង ពីចំណុច មួយ ទៅ ចំណុចបន្ទាប់ គេអាចប្រើ ដំណើរវិល (Rotation) មានផ្ចិត O និង មុំ $\frac{2\pi}{n}$ ដែល យើងតាងដោយ $Rot(O,\frac{2\pi}{n})$ ។ ឧបមាដូចជា $M_0 - Rot(O,\frac{2\pi}{n}) \to M_1$ -$Rot(O,\frac{2\pi}{n}) \to M_2$ (Fig-2) ។

$$M_0 \xrightarrow{Rot(O,\frac{2\pi}{n} \times 2)} M_2$$

នៅក្នុងចំណោទយើងនេះ $Rot(O,\frac{2\pi}{n})$ គឺ តាងដោយ p ពីព្រោះ ដោយ រូបភាព (Fig-1) ខាងលើ $p(x_k) = x_{k+1} \iff p(M_k) = M_{k+1}$ ។គេចង់ឲ្យយើងបង្ហាញថា ពែមុតាស្យុង (ពី M_h ទៅ M_{h+1}) ហើយ (ពី M_{h+1} ទៅ M_{h+2}) ហើយ (ពី M_{h+2} ទៅ M_{h+3})........ ហើយ (ពី M_{h+k-1} ទៅ M_{h+k}) នោះស្មើនឹង $Rot(O,\frac{2\pi}{n} \times k)$ ពី M_h ទៅ M_{h+k}។

គឺថា $p^k = Rot(O,\frac{2k\pi}{n})$ ។ ដោយ

$$\frac{2k\pi}{n} = \left(\frac{2\pi}{n}\right)k = \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} + \dots + \frac{2\pi}{n} \quad (k \text{ ដង})$$ ដូច្នេះ

$$Rot(O,\frac{2k\pi}{n})(M_h) = [Rot(O,\frac{2\pi}{n})\circ Rot(O,\frac{2\pi}{n})\circ Rot(O,\frac{2\pi}{n})\circ \dots Rot(O,\frac{2\pi}{n})](M_h)$$

$$= [p \circ p \circ p \circ \dots \circ p](M_h) = p^k(M_h) \Rightarrow \boxed{Rot(O,\frac{2k\pi}{n}) = p^k}$$ ។

<u>សង្កេត</u>

1/ ដំណើរវិល ឬ រូតាស្យុង (rotation) ជា ពែមុតាស្យុងពិសេស ពីព្រោះវាវិល ជុំវិញ ផ្ចិតនៃ រង្វង់មូល ដូច្នេះចម្ងាយ ពី ចំណុចមកផ្ចិត នៅដដែល មិនផ្លាស់ប្តូរ ។ ហើយចំពោះ ពែមុតាស្យុង ធម្មតា គេគ្រាន់តែផ្លូវកន្លែង ចំណុចនីមួយៗ តែប៉ុណ្ណោះ។

2/ ឃើញថានៅ លើ រង្វង់មូល ចំណុច នីមួយៗ $M_1(x_1), M_2(x_2), M_3(x_3),\dots, M_n(x_n) = M_0$ សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ កាលណា មុំ ដែលផ្លូ នឹង x_i ផ្សេងៗគ្នា ។ ដែល គួរកត់សម្គាល់

ដែរ គឺមុំ នីមួយៗ សុទ្ធតែ តូច ឬ យ៉ាងច្រើន ស្មើនឹង 2π គឺថា $0 \leq x_i < 2\pi$ ។ ហេតុនេះហើយ បានជាគេថា មាន ប៊ីសេចស្យុង រវាង x_i និង ចំណុច M_i ដោយ ហេតុ តែលក្ខខ័ណ្ឌ $0 \leq x_i < 2\pi$ នេះឯង។ ឧបមា គេ ជំនួស x_i ដោយ $x_i + 2\pi$ នោះ ចំណុច $M_i(x_i)$ និង ចំណុច $M_i\,(x_i + 2\pi)$ ចំណុចទាំងពីរនេះជាន់លើគ្នា (មើល $Fig - 1$) ។ ហេតុនេះហើយ បានជាទូទៅ កាលណា គេឲ្យ ចំណុច M មួយ នៅលើរង្វង់មូល ហើយ បើ មុំ $\propto = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ ដោយ $0 \leq \propto < 2\pi$ នោះគេសរសេរ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \propto +2k\pi, (k \in N)$ ។ នេះ ដោយហេតុថា មុននឹងមកដល់ចំណុច M នោះ យើងមិនដឹងថា គេបានធ្វើ ប៉ុន្មានជុំ រួចមកហើយទេ ។

មាតិការ		ទំព័រ (ក្នុងអត្ថបទ)
§	**ជំពូក-IV (Chapitre-IV)** **PROBLEMES RELATIFS AUX ENTIERS** **ចំណោទទាំងឡាយទាក់ទងនឹងចំនួនគត់** ការរាប់ **(dénombrement)** ប្រូបាប **(probabilité)** កម្ម សិទ្ធិចែកដាច់ **(propriétés de divisibilité)**	
១.	លំនាំដើម	1
២	ចំលាស់ (*arrangements*) – ពៃមុតាស្យុង (*permutations*)	3
៣	បន្សំ (Combinaisons) – រូបមន្តនៃ ទេ្វធា (*Formule du binôme*).	**7**
	ត្រីកោណ ប៉ាស្កាល (triangle de Pascal)	
៤	ប្រូបាប (*Probabilités*).	15
៥	សិក្សាពី ការបដិបត្តិ (*Etude pratique*).	17
	ស្វ័យសត្យ នៃប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ (axiome de probabilités conditionnelles). ព្រឹត្តការណ៍មិនទាក់ទងគ្នានៃប្រូបាប (indépendance n probabilité). វ៉ារីយ៉ាបមិនទៀង (variable aléatoire).	

	ប្រូបាបរូបភាព (probabilité-image). ដ្យាក្រាមជាដំបង (diagramme en bâtons). អនុគមន៍ រ៉េបាទីស្យុង (fonction de répartition). បន្ទាត់កោងបូក (courbe cumulative).	
៦	ចំណោទ នៃ ភាពចែកដាច់ (*Problèmes de divisibilité*).	43
	ពហុគុណរួម (multiple commun). តួចែករួមធំបំផុត (P.G.C.D.) ក្បួនដោះស្រាយ អឺគ្លីត (algorithme d'Euclide).	
៧	កម្មសិទ្ធិ នៃ *P.G.C.D* (*Propriété du P.G.C.D.*)	46
	ទ្រឹស្តីបទ បឺហ្សូត (theorème de Bezout). ឧទាហរណ៍ ទី១ ដល់ ទី៤	
៨	ទ្រឹស្តីបទ ហ្គោស (*Théorème de Gauss*) . ពហុគុណរួមតូចបំផុត (P.P.C.M)	52
៩	ចំនួន បឋម (*Nombres premiers*).	56
	បំបែកជាកត្តាបឋម	
១០	**លំហាត់ មានចម្លើយ**	**60**
	IV-1	60
	IV-2	61
	IV-3	62
	IV-4	62
	IV-5	62
	IV-6	64
	IV-7	68