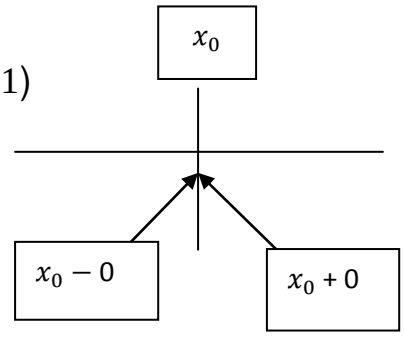
ឧបសម្ព័ន្ធ-១(ANNEXE-1)

អនុគមន៍ជាប់ និងអនុគមន៍ដេរីវ៉ាប

1- អំពី លីមីត (Fig-1)



នៅក្នុងគំនូរនេះ យើងឃើញថា ៖

$x_0 - 0$ *មិនមែន* x_0 *ទេ គឺគ្រាន់តែជិតស្មើនឹង* x_0 *(ដោយតូចជាង* x_0 *) ហើយ*

$x_0 + 0$ *មិនមែន* x_0 *ទេ គឺគ្រាន់តែជិតស្មើនឹង* x_0 *(ដោយធំជាង* x_0 *) ។*

លីមីត ខាងឆ្វេង នៃអនុគមន៍ f *ត្រង់ចំណុច* x_0 *គេសរសេរ* $f(x_0 - 0)$ *ឬ* $f(x_0 -)$

លីមីត ខាង ស្តាំ នៃអនុគមន៍ f *ត្រង់ចំណុច* x_0 *គេសរសេរ* $f(x_0 + 0)$ *ឬ* $f(x_0 +)$

2- ចន្លោះ I ក្នុង R

a/ $I = [a \quad x \quad b \quad +\infty$ $\quad I = [a ; b] \Leftrightarrow I = \{ x / \ a \leq x \leq b \}$

ដូច្នេះ $a \in I$, $a^+ \in I$ *និង* $b \in I$, $b^- \in I$

b/ $I =]a \quad x \quad b \quad +\infty$ $\quad I =]a ; b[\Leftrightarrow I = \{ x / \ a < x < b \}$

ដូច្នេះ $a \notin I$, $a^+ \in I$ *និង* $b \notin I$, $b^- \in I$

c/ $I =]a \quad x \quad b] \quad +\infty$ $\quad I =]a ; b] \Leftrightarrow I = \{ x / \ a < x \leq b \}$

ដូច្នេះ $a \notin I$, $a^+ \in I$ *និង* $b \in I$, $b^- \in I$

d/ $I = [a \quad x \quad b[\quad +\infty$ $\quad I = [a ; b[\Leftrightarrow I = \{ x / \ a \leq x < b \}$

ដូច្នេះ $a \in I$, $a^+ \in I$ និង $b \notin I$, $b^- \in I$

3- អនុគមន៍ជាប់

3-1. អនុគមន៍ជាប់ ត្រង់ចំណុច x_0

f ជា អនុគមន៍ កំនត់ ពីចន្លោះ I ទៅ R (f : I→ R) និង x_0 ជាចំណុចមួយ ក្នុង I (x_0 អាចនៅខាងចុង ណាមួយនៃ ចន្លោះ I) ។

-គេថា អនុគមន៍ f ជាប់ខាងស្តាំ ត្រង់ចំណុច x_0 កាលណា $f(x_0+) = f(x_0)$ គឺថា

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$$

-គេថា អនុគមន៍ f ជាប់ខាងធ្វេង ត្រង់ចំណុច x_0 កាលណា $f(x_0-) = f(x_0)$ គឺថា

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$$

-គេថា អនុគមន៍ f ជាប់ ត្រង់ចំណុច x_0 កាលណា f ជាប់ខាងស្តាំផង និង ជាប់ខាងធ្វេងផង ។ គឺថា $f(x_0+) = f(x_0) = f(x_0-)$ ឬ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ។

3-2. អនុគមន៍ជាប់ លើចន្លោះ នៃ R

f ជាអនុគមន៍ ពី I ទៅ R ហើយ ចន្លោះ I មានចុង a និង b (a < b) ហើយ a ឬ b អាច ជា $+\infty$ ឬ $-\infty$ ។ គេថា ៖

f ជាប់ លើ]a ; b[⇔ f ជាប់ គ្រប់ចំណុច នៃ]a ; b[

f ជាប់ លើ [a ; b] ⇔ $\begin{cases} \text{f ជាប់ គ្រប់ចំណុច នៃ]a ; b[និង} \\ \text{f ជាប់ ខាងស្តាំ ត្រង់ } x = a \text{ និងខាងធ្វេង ត្រង់ } x = b \end{cases}$

f ជាប់ លើ [a ; b[⇔ $\begin{cases} \text{f ជាប់ គ្រប់ចំណុច នៃ]a ; b[និង} \\ \text{f ជាប់ ខាងស្តាំ ត្រង់ } x = a \end{cases}$

f ជាប់ លើ]a ; b] ⇔ $\begin{cases} \text{f ជាប់ គ្រប់ចំណុច នៃ]a ; b[និង} \\ \text{f ជាប់ ខាងធ្វេង ត្រង់ } x = b \end{cases}$

f ជាប់ លើ [a ; +∞[$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ ជាប់ គ្រប់ចំណុច នៃ } x > a \text{ និង} \\ f \text{ ជាប់ ខាងស្តាំ ត្រង់ } x = a \end{cases}$

f ជាប់ លើ]- ∞ ; b] $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ ជាប់ គ្រប់ចំណុច នៃ } x < b \text{ និង} \\ f \text{ ជាប់ ខាងឆ្វេង ត្រង់ } x = b \end{cases}$

ពាក្យដែលគេនិយាយ

កាលណា អនុគមន៍ f ជាប់ លើ ចន្លោះ I នៃ R គេថា f នៅក្នុងថ្នាក់ C^0 លើ I ។

3-3. **<u>ការបន្ត ដោយផ្លាប់</u>** (prolongement par continuité)

ឧបមា អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ]a ; b[នៃ R ហើយ ឧបមា f មិន កំនត់ ត្រង់ b តែមានលិមីតខាងឆ្វេង ត្រង់ចំណុច b ។ នៅពេលនោះ គេកំនត់ អនុគមន៍ g លើ]a ; b] ដោយ ដាក់ ៖

$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ បើ } x \in]a ; b[\quad (1) \\ g(b) = f(b - 0) \quad (2) \end{cases}$

ដូច្នេះ g ជាប់លើចន្លោះ]a ; b] ពីព្រោះ

ដោយ (1) $g(b-0) = f(b-0)$

ដោយ (2) $g(b) = f(b-0)$

$\Rightarrow g(b - 0) = g(b)$

ហើយ g គេហៅថា <u>បន្ត f ដោយផ្លាប់</u> (g prolongement par continuité de f) (ជួនកាលគេនៅតែសរសេរ f ជំនួស g ដោយរំលោភ ក្នុងការកត់ សរសេរ (par abus de notation)។

4- <u>**ដេរីវ៉ាបប៊ីលីតេ**</u> (dérivabilité)

4-1 <u>**ដេរីវ៉ាប៊ីលីតេ ត្រង់ចំណុចមួយ**</u> (dérivabilité en un point)

គេឲ្យ អនុគមន៍ f កំនត់លើចន្លោះ I នៃ R ចន្លោះ I ដែលមាន x_0 ក្នុងនោះ ។

- អនុគមន៍ f ដេរីវ៉ាបត្រង់ចំណុច x_0 (ដោយ ឧបមាថា x_0 ខុសពីចំណុច

ចុងទាំងសងខាងនៃ ចន្លោះ I) លុះត្រាតែ $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}$ មានលីមីត A កាលណា $x \to x_0$

ហើយ A ជាចំនួនពិតធម្មតា មិនអនន្ត ។ ចំនួន A នោះហៅថា **ចំនួនដេរីវ** នៃ f ត្រង់ x_0

$$A = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

<u>វិបាក</u>ៈ (Conséquence)

f ដេរីវ៉ាបត្រង់ចំណុច x_0 => f ជាប់ត្រង់ x_0

ព្រោះថាដើម្បី A មាន លុះត្រាតែ $\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)]$ មាន ។ ដើម្បីលីមីតមាន

ទាល់តែ $f(x)$ អាច ខិតជិត $f(x_0)$ បាន កាលណា x ខិតជិត x_0 ។ ហើយ $f(x)$

អាចខិតជិត $f(x_0)$ បាន កាលណាខ្សែ កោង (ក្រាប របស់ f) ជាប់មុំ x_0

(ព្រោះថាកាលណាដាច់ផ្លូវ ទៅម្តេចដល់ !) ។

- អនុគមន៍ f <u>ដេរីវ៉ាបខាងស្តាំ</u>ត្រង់ចំណុច x_0 (ដោយឧបមាថា x_0 ខុសពីចំណុច

ចុង ខាងស្តាំនៃចន្លោះ I) បើ $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}$ មានលីមីត ខាងស្តាំ D កាលណា $x \to x_0$

ចំនួន D នោះហៅថា <u>ចំនួនដេរីវខាងស្តាំ</u> នៃ f ត្រង់ x_0

$$D = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- នុគមន៍ f <u>ដេរីវ៉ាបខាងឆ្វេង</u>ត្រង់ចំណុច x_0 (ដោយឧបមាថា x_0 ខុសពីចំណុច

ចុង ខាងឆ្វេងនៃចន្លោះ I) បើ $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}$ មានលីមីត ខាងឆ្វេង G កាលណា $x \to x_0$

ចំនួន G នោះហៅថា <u>ចំនួនដេរីវខាងឆ្វេង</u> នៃ f ត្រង់ x_0

$$G = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

4-2 ដេរីវ៉ាប៊ីលើតេ លើចន្លោះមួយ នៃ R (dérivabilité sur un intervalle de R)

f ជាអនុគមន៍ ពី I ទៅ R ហើយ ចន្លោះ I មានចុង a , b ដោយ a < b ហើយ a ឬ b អាច ជា $+\infty$ ឬ $-\infty$ ។ គេថា ៖

f ដេរីវ៉ាប លើ]a ; b[$\Leftrightarrow$ f ដេរីវ៉ាប គ្រប់ចំណុច នៃ]a ; b[

<u>សង្កេត</u> : ចំនុច a និង b មិននៅក្នុង ចន្លោះ]a ; b[ទេ ។

f ដេរីវ៉ាប លើ [a ; b] $\Leftrightarrow$ f ដេរីវ៉ាប គ្រប់ចំណុច នៃ]a ; b[និង f ដេរីវ៉ាប ខាងស្តាំ ត្រង់ $x = a$ និងខាងឆ្វេង ត្រង់ $x = b$

f ដេរីវ៉ាប [a ; b[$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{f ដេរីវ៉ាប គ្រប់ចំណុច នៃ]a ; b[និង} \\ \text{f ដេរីវ៉ាប ខាងស្តាំ ត្រង់ } x = a \end{cases}$

f ដេរីវ៉ាប]a ; b] $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{f ដេរីវ៉ាប គ្រប់ចំណុច នៃ]a ; b[និង} \\ \text{f ដេរីវ៉ាប ខាងឆ្វេង ត្រង់ } x = b \end{cases}$

f ដេរីវ៉ាប [a ; +∞[$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{f ដេរីវ៉ាប គ្រប់ចំណុច នៃ } x > a \text{ និង} \\ \text{f ដេរីវ៉ាប ខាងស្តាំ ត្រង់ } x = a \end{cases}$

f ដេរីវ៉ាប]-∞ ; b] $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{f ដេរីវ៉ាប គ្រប់ចំណុច នៃ } x < b \text{ និង} \\ \text{f ដេរីវ៉ាប ខាងឆ្វេង ត្រង់ } x = b \end{cases}$

5- អនុគមន៍ ដេរីវ៉ (Fonction dérivée)

5-1 និយមន័យ

f ជាអនុគមន៍ កំនត់ និងដេរីវ៉ាប លើ ចន្លោះបើក I នៃ R ។ អនុគមន៍ សរសេរ ដោយ f' ដែល គ្រប់ចំណុច x នៃ I ឲ្យ ចំនួនដេរីវ៉ នៃ f ត្រង់ចំណុច x អនុគមន៍នោះ

ហៅថា <u>អនុគមន៍ ដេរីវ៉ែ នៃ f លើ I</u> ។

$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

គេ កំនត់ ដូចគ្នានេះ ចំពោះ ដេរីវេ បន្ទាប់បន្ត ទៅ គឺ f'', $f^{(3)}$,..... , $f^{(n)}$, ដែលជា ដេរីវេ របស់អនុគមន៍ តាមលំដាប់ f', f'', ... , $f^{(n-1)}$ បើសិនជាដេរីវេ ទាំងនោះ មាន ។

កាលណា មានចុងណាមួយ នៅក្នុងចន្លោះ I ដូចជា I =]a ; b] នៅពេលនោះ អនុគមន៍ f' គឺអនុគមន៍ ដែល គ្រប់ចំណុច x នៃ]a ; b[យក ចំនួនដេរីវេ ត្រង់ចំណុច x នោះ ហើយចំពោះចំណុច b អនុគមន៍ f' នោះ យកចំនួនដេរីវេខាងឆ្វេងនៃ ចំណុច b ។ (និយមន័យ ដូចគ្នា ចំពោះ I = [a ; b[ ) ។

<u>5-2 អនុគមន៍ថ្នាក់ C^n និង C^∞ លើចន្លោះ នៃ R</u>

- អនុគមន៍ f នៅក្នុងថ្នាក់ C^1 លើចន្លោះ I នៃ R (I បើកឬ បិទ) កាលណា អនុគមន៍នោះ ដេរីវ៉ាប លើចន្លោះ I ហើយ ដេរីវេ របស់វា ជាអនុគមន៍ជាប់ លើចន្លោះ I ។
- អនុគមន៍ f នៅក្នុងថ្នាក់ C^2 លើចន្លោះ I នៃ R (I បើកឬ បិទ) កាលណា អនុគមន៍នោះ ដេរីវ៉ាប ពីរដង លើចន្លោះ I ហើយ f', f'' ជាប់ លើចន្លោះ I ។

<u>ជាទូទៅ ៖</u>

- អនុគមន៍ f នៅក្នុងថ្នាក់ C^n លើចន្លោះ I នៃ R (I បើកឬ បិទ) កាលណា អនុគមន៍នោះ ដេរីវ៉ាប n ដង លើចន្លោះ I ហើយ f', f'' ... រហូតដល់ ជួរ n ($f^{(n)}$) ជាប់ លើចន្លោះ I ។
- អនុគមន៍ f នៅក្នុងថ្នាក់ C^∞ លើចន្លោះ I នៃ R (I បើកឬ បិទ) កាលណា អនុគមន៍នោះ ដេរីវ៉ាប អនន្តដង លើចន្លោះ I ហើយ ដេរីវេទាំងអស់ របស់អនុគមន៍នោះ

ជាប់ លើចន្លោះ I ។

<u>សង្កេត</u>

- បើអនុគមន៍ f ដេរីវ៉ាប លើចន្លោះ [a ; b] និង [b ; c] នោះ f មិនចាំបាច់ ដេរីវ៉ាប ត្រង់ចំណុច b ទេ ។ ដូច្នេះ f ក៏អាច មិនដេរីវ៉ាបលើ ចន្លោះ [a ; c] ដែរ ។ ពីព្រោះថា

  f ដេរីវ៉ាប លើចន្លោះ [a ; b] => $f'(b^-)$ មាន ឧបមា $f'(b^-) = \alpha$

  f ដេរីវ៉ាប លើចន្លោះ [b ; c] => $f'(b^+)$ មាន ឧបមា $f'(b^+) = \beta$

  តែ $\propto$ និង β អាចមិនស្មើគ្នា ដូច្នេះ f មិនដេរីវ៉ាប ត្រង់ b ។

<u>ឧទាហរណ៍</u>

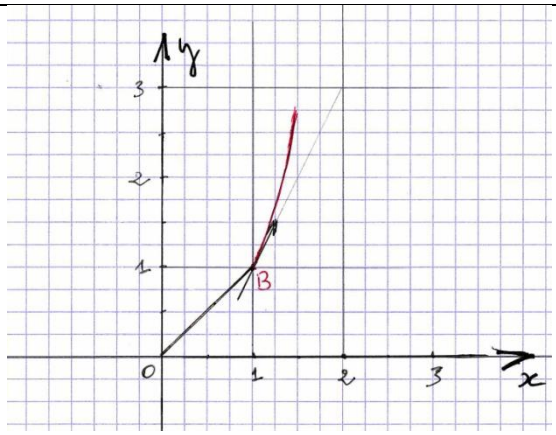
ឧបមា អនុគមន៍ f កំនត់ ដោយ ៖

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{លើចន្លោះ } [0 ; 1] \\ f(x) = x^2 & \text{លើចន្លោះ } [1 ; 2] \end{cases}$$

យើងឃើញថា f ដេរីវ៉ាប លើចន្លោះ $[0 ; 1]$ ហើយ $f'(x) = 1$

និង f ដេរីវ៉ាប លើចន្លោះ $[1 ; 2]$ ហើយ $f'(x) = 2x$

តែត្រង់ចំណុច $B(1,1)$ យើង ឃើញថា៖



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 1 \Rightarrow \text{ចំពោះ } x = 1,\ f'(1-0) = 1 \\ f'(x) = 2x \Rightarrow \text{ចំពោះ } x = 1,\ f'(1+0) = 2 \end{array}\right\} \text{ដូច្នេះ ៖ } f'(1-0) \neq f'(1+0) \Rightarrow$$

f មិនដេរីវ៉ាប ចំពោះ $x = 1$ ។

ដូច្នេះ f មិនដេរីវ៉ាប លើ ចន្លោះ $[0 ; 2]$ ទេ ព្រោះមានចំណុច $x = 1$ ($x \in [0 ; 2]$) ដែល f មិនដេរីវ៉ាប ។

- បើអនុគមន៍ f នៅក្នុងថ្នាក់ C^0 លើចន្លោះ [a ; b] និង [b ; c] នោះ f នៅក្នុងថ្នាក់ C^0 លើចន្លោះ [a ; c] ។

- *បើអនុគមន៍ f នៅក្នុងថ្នាក់ C^1 លើចន្លោះ* [a ; b] និង [b ; c] *នោះ f មិននៅក្នុងថ្នាក់ C^1 លើចន្លោះ* [a ; c] *ជាចាំបាច់នោះទេ លើកលែងតែ f ដេរីវ៉ាប ត្រង់ចំណុច b ថែមទៀតៗ*