

ចំណេញ-ទី៤

គោលបំណង ការប្រើ បំប្លែងឡាប្លាស ក្នុង ការបកស្រាយនូវ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

ប្រធានបទ

ចូរបកស្រាយ ក្នុងចន្លោះ $[0 ; +\infty[$ ដោយជំនួយ បំប្លែងឡាប្លាស នូវប្រព័ន្ធសមីការ

ឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$\begin{cases} 4x(t) + y'(t) = U(t) & (1) \\ y(t) + x'(t) = 0, & (2) \end{cases} \quad \text{ដោយ } x(0) = 1 ; y(0) = 0 \quad (3) \quad \text{។}$$

ចម្លើយ ៖

ដើម្បី ក្នុងចន្លោះ $[0 ; +\infty[$ នូវប្រព័ន្ធសមីការ ខាងលើ ដោយប្រើបំប្លែងឡាប្លាសបាន លុះត្រាតែ ប្រព័ន្ធនោះ ផ្ទៀងផ្ទាត់ នឹងលក្ខណៈនៃបំប្លែងឡាប្លាស ពោលគឺអនុគមន៍ ទាំងអស់ដែលត្រូវប្រើបំប្លែងឡាប្លាស សុទ្ធតែជាអនុគមន៍ សហេតុ¹ ។ ដើម្បីបំពេញ លក្ខណៈនេះ យើងតាង ក្នុងទីនេះ ៖

U អនុគមន៍ ថ្នាក់ឯកតា $U(t) = 1$ ចំពោះ $t \in [0 ; +\infty[$

x, y ជាចម្លើយ នៃ ប្រព័ន្ធសមីការ ខាងលើ

Ux គឺអនុគមន៍ ដែល $(Ux)(t) = U(t)x(t) \Rightarrow$ ដេរីវេ

$$(Ux)'(t) = [U(t)x(t)]' = U(t)x'(t) \quad (4) \quad (\text{ព្រោះ } U(t) = 1 \text{ ជាចំនួន ថេរ})$$

Uy គឺអនុគមន៍ ដែល $(Uy)(t) = U(t)y(t) \Rightarrow$ ដេរីវេ

$$(Uy)'(t) = [U(t)y(t)]' = U(t)y'(t) \quad (5) \quad (\text{ព្រោះ } U(t) = 1 \text{ ជាចំនួន ថេរ}) \quad \text{។}$$

¹ គេថា អនុគមន៍ y សហេតុ លុះត្រាតែ $y(t) = 0$ ចំពោះ $t < 0$

ដោយមានដេរីវេ x' និង y' នោះអនុគមន៍ x និង y ត្រូវតែជាប់ខាងស្តាំត្រង់ ចំណុច $t = 0$

$$\text{គឺថា } x(0) = x(0^+) = 1, \quad y(0) = y(0^+) = 0 \quad (6)$$

ដោយ ត្រូវរកចម្លើយក្នុងចន្លោះ $[0; +\infty[$ នោះយើងអាច គុណ (1) និង (2) ដោយ $U(t)$ ពីព្រោះ $U(t) = 1$ នៅក្នុងចន្លោះនោះ។ ដូច្នេះយើងបាន៖

$$(1) \Rightarrow 4x(t)U(t) + y'(t)U(t) = U(t)$$

$$(2) \Rightarrow y(t)U(t) + x'(t)U(t) = 0$$

រឺ ដោយ (4) និង (5) គេអាចសរសេរ ៖

$$\begin{cases} 4(xU)(t) + (yU)'(t) = U(t) & (1a) \\ (yU)(t) + (xU)'(t) = 0 & (2a) \end{cases}$$

$$\text{និង ដោយ (6), } (xU)(0^+) = 1; \quad (yU)(0^+) = 0 \quad (3a)$$

ដោយ xU និង yU ជាអនុគមន៍សហេតុ យើងអាចអនុវត្តបំប្លែងឡាប្លាសបាន លើ

(1a) និង (2a) ហើយ ដោយតាង $X(p) = \mathcal{L}[xU](p); Y(p) = \mathcal{L}[yU](p)$ យើងបាន ៖

$$4X(p) + pY(p) - yU(0^+) = \frac{1}{p}$$

$$Y(p) + pX(p) - xU(0^+) = 0$$

រឺ ដោយ (3a) ៖

$$\begin{cases} 4X(p) + pY(p) = \frac{1}{p} \\ Y(p) + pX(p) = 1 \end{cases}$$

នេះជាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ មាន ពីរអញ្ញាតគឺ $X(p)$ និង $Y(p)$ ។

បន្ទាប់ពីបកស្រាយយើងបាន៖

$$\begin{cases} X(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2-4)} \\ Y(p) = \frac{-3}{p^2-4} \end{cases}$$

យើងធ្លាប់បានឃើញជាញឹកញាប់មកហើយ² ដើម្បីប្រើតារាងបំប្លែងឡាប្លាស យើងត្រូវ

បំបែកប្រភាគ របស់ $X(p)$ និង $Y(p)$ ជាធាតុតូចៗ ដូចជា៖

$$\frac{p^2-1}{p(p^2-4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+2} \quad (7)$$

$$\frac{-3}{p^2-4} = \frac{D}{p-2} + \frac{E}{p+2} \quad (8)$$

ចំពោះ (7)

ដើម្បីរក A គេគុណ អង្គទាំងសងខាង ដោយ p ហើយបន្ទាប់ពីសម្រួល គេ ឲ្យ $p = 0$

ហើយគេបាន $A = \frac{1}{4}$ ។

ដើម្បីរក B គេគុណ អង្គទាំងសងខាង ដោយ $p-2$ ហើយបន្ទាប់ពីសម្រួល គេ ឲ្យ $p = 2$

ហើយគេបាន $B = \frac{3}{8}$ ។

ដើម្បីរក C គេគុណ អង្គទាំងសងខាង ដោយ $p+2$ ហើយបន្ទាប់ពីសម្រួល គេ ឲ្យ $p = -2$

ហើយគេបាន $C = \frac{3}{8}$ ។

ចំពោះ (8)

ដើម្បីរក D គេគុណ អង្គទាំងសងខាង ដោយ $p-2$ ហើយបន្ទាប់ពីសម្រួល គេ ឲ្យ $p = 2$

ហើយគេបាន $D = -\frac{3}{4}$ ។

² ដោយរបៀបរកធាតុតូចៗ មិនផ្លាស់ប្តូរ តទៅមុខទៀតខ្ញុំជូនតែលទ្ធផលតែម្តងដោយមិនបង្ហាញរបៀបរក

ដើម្បីរក E គេគុណ អង្គទាំងសងខាង ដោយ $p+2$ ហើយបន្ទាប់ពីសម្រួល គេឲ្យ $p = -2$

ហើយគេបាន $E = \frac{3}{4}$ ។

រួមសេចក្តីទៅ គេបាន៖

$$X(p) = \frac{1}{4p} + \frac{3}{8(p-2)} + \frac{3}{8(p+2)} \quad (9)$$

$$Y(p) = -\frac{3}{4(p-2)} + \frac{3}{4(p+2)} \quad (10)$$

ដោយ (9) និង (10) តារាងបំប្លែងឡាប្លាស ឲ្យអនុគមន៍ដើម $x(t)$ និង $y(t)$ ឬ

$x(t), y(t)$ ចំពោះ $t \in]0; +\infty[$, ដូចតទៅ៖

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{-2t} & (\text{ដោយ (9)}) \\ y(t) = -\frac{3}{4}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t} & (\text{ដោយ (10)}) \end{cases}$$

នៅទីបញ្ចប់ លើ R^+ , គេបាន៖

$$x(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{-2t} \quad \text{ដោយ } t \in]0; +\infty[$$

$$y(t) = -\frac{3}{4}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t} \quad \text{ដោយ } t \in]0; +\infty[$$

$$x(0) = 1$$

$$y(0) = 0$$