X. ការបកស្រាយ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល លីនេអ៊ែ ដែលមេគុណជាប់ទាក់ទងនឹងអថេរ៖ អនុគមន៍ បេស្សែល[1]

(Résolution d'une équation différentielle linéaire dont les coefficients dépendent de la variable : Fonction de Bessel)

ចំណោទគឺថា ចូររកចម្លើយ បើសិនជាមាន របស់អនុគមន៍ ឌីផរ៉ង់ស្យែល ៖

$$\begin{cases} ty'' + y' + ty = 0 & \textbf{(E1)} \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

ចម្លើយនេះ ហៅថាអនុគមន៍បេស្សែល សន្ទស្សន៍សូន្យ (fonction de Bessel d'indice 0) ។ *តទៅនេះ យើងបកស្រាយដោយប្រើ ២ របៀប ។ របៀបទីមួយ គឺរកចម្លើយ* y *ជាអនុគមន៍ ផលបូកនៃ ស៊េរីគត់* (série entière) *ហើយរបៀបទីពីរ គឺប្រើបំប្លែងឡាប្លាស ។ ផ្នែកទីបី គឺបានបំប្លែងឡាប្លាសតែម្តង ដោយ ប្រើអនុគមន៍បេស្សែល* J_0 *ដែលបានមកដោយផ្នែកទាំងពីរខាងលើ ។*

A. *ការបកស្រាយដោយរក ស៊េរីគត់*

ឧបមាថា ចម្លើយដែលរក មានរាងដូចរូបមន្ត ៖

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

ដោយកាំរួម R[2] (rayon de convergence) *មិនសូន្យ ។ ដូច្នេះនៅក្នុងចន្លោះ*]–R ; + R[*គេអាចរកដេរីវេ ស៊េរី ដោយធ្វើដេរីវេទ្ធវត្ត នីមួយៗនៃស៊េរី*[3] *គឺ ៖*

$y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$ *និង* $y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

ដើម្បី $y(t)$ *ជាចម្លើយ សមីការ* **(E1)** *យើងត្រូវបាន៖*

---

[1] **Friedrich Wilhelm Bessel** (22 juillet 1784, Minden — 17 mars 1846, Königsberg) est un astronome et mathématicien allemand.

[2] *គេសន្មតថា ស៊េរីខាងលើមានលីមីតកាលណា* n-> +∞ *បើ* t *នៅក្នុងចន្លោះនៃកាំរួម* R *គឺ* $t \in [-R\,;\ +R[$

[3] *យល់ព្រមសិនចុះ ចាំមើលនៅឧបសម្ព័ន្ធ*-IV (annexe-4)

t.$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-2}$ $+ \sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, t^{n-1}$ + t. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ = 0 **(1)**

ដើម្បី រក $y(t)$ យើងត្រូវរក មេគុណ a_n ចំពោះ $n \geq 0$ ដោយប្រើ **(1)** ។

ដូចនេះយើងត្រូវ ប្រមូលផ្តុំមេគុណទាំងឡាយរបស់ t^n ហើយដោយ ពហុធា **(1)**ត្រូវ

ស្មើនឹងសូន្យ នោះ ផលបូកនៃមេគុណទាំងនោះត្រូវស្មើនឹងសូន្យដែរ, $\forall n \geq 0$ ។

(1) => P(t) = $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-1}$ $+ \sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, t^{n-1}$ $+ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1}$ = 0

$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-1} = 2.1.a_2 t + 3.2.a_3 t^2 + 4.3.a_4 t^3 + 5.4.a_5 t^4 + .. + n(n-1)a_n \boldsymbol{t^{n-1}} + ..$

$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, t^{n-1} = 1.a_1 + 2.a_2 t + 3.a_3 t^2 + 4.a_4 t^3 + 5.a_5 t^4 + \cdots + n.a_n \boldsymbol{t^{n-1}} + \ldots..$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} = a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_4 t^5 + a_5 t^6 + \ldots + a_{n-2}\boldsymbol{t^{n-1}} + a_{n-1}t^n + a_n t^{n+1} + \ldots$

P(t) = a_1+ ($2a_2$+ $2a_2$+ a_0)t + (3.2.a_3 +3.a_3 + a_1)t^2+…+ [n(n-1)a_n+ na_n + a_{n-2}] t^{n-1}+..
P(t) = a_1+ ($4a_2$+ a_0)t + [(3.2.+3)a_3 + a_1]t^2+…+ ($n^2 a_n + a_{n-2}$) t^{n-1}+.. ….. **(2)**

ដោយប្រើក្នុង **(E1)** នូវ លក្ខខណ្ឌ y(0) = 1, y'(0) = 0 យើងបាន៖

$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ => y(0) = a_0 => $\boxed{a_0 = 1}$ (ព្រោះ y(0) = 1) **(3)**

$y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, t^{n-1}$ => $y'(0) = a_1 = \boxed{a_1 = 0}$ (ព្រោះ y'(0) = 0) **(4)**

ដូច្នេះ (2) ទៅជា ៖

P(t) = ($4a_2$+ 1)t + [(3.2.+3)a_3 + a_1]t^2+…+ ($n^2 a_n + a_{n-2}$) t^{n-1}+.. …..
P(t) = 0 =>

$$\begin{cases} 4a_2 + 1 = 0 & \textbf{(5)} \\ (3.2.+3)a_3 + a_1 = 0 & \textbf{(6)} \\ n^2 a_n + a_{n-2} = 0 \text{ ចំពោះ } n \geq 2 & \textbf{(7)} \end{cases}$$

ជាសម្ព័ន្ធរេគារ៉ង់ (relation de récurrence)។

ដោយ (5) $4a_2 + 1 = 0$ => $\boxed{a_2 = -\frac{1}{4}}$ **(8)**

ដោយ (6) $9a_3 + a_1 = 0$ => $\boxed{a_3 = 0}$ **(9)**

ដោយ (7) ចំពោះ n = 4 , $4^2 a_4 = -a_2$ => $a_4 = \frac{-a_2}{4^2} = \frac{1}{2^2 \times 4^2}$ **(10)**

បំណងរបស់យើង គឺរក មេគុណ a_n ចំពោះ n ≥ 0 ព្រោះកាលណាយើងដឹង a_n ដោយ $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ នោះយើងដឹង ចម្លើយ $y(t)$ ។ តាមធម្មតា គេដឹង a_n ដោយ សារសម្ព័ន្ធវេគារ៉ង់ ដែលទាក់ទងជាមួយនឹង មេគុណដើម ដូចជា $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,$ ។ តាមការសង្កេតនូវមេគុណដែលបានរកឃើញខាងលើ យើងអាចទាញយករូបមន្ត ដូចតទៅ៖

1/ $a_{2p+1} = 0, \ \forall p \geq 0$ **(F1)**

2/ $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times \ldots \times (2p)^2}, \ \forall p \geq 1$ **(F2)**

យើងនឹងបង្ហាញ **(F1)** និង **(F2)** ដោយពិធី បញ្ជាក់ដោយវេគារ៉ង់ :

a/ <u>បង្ហាញថា</u> $a_{2p+1} = 0, \ \forall p \geq 0$

ចំពោះ p = 0, $a_1 = 0$ ត្រូវ ដោយ (4)

ដូចនេះយើងសន្មតថា (F1) ត្រូវរហូតដល់ n = 2p+1 ហើយយើងត្រូវបង្ហាញថា (F1) ក៏ត្រូវចំពោះ n = 2p +3 ដែរ ។ ដោយការសន្មតនេះ គេបាន

ចំពោះ n = 2p+1, $a_{2p+1} = 0$ **(α)**

ចំពោះ n = 2p+3, ដោយ (7), $n^2 a_n + a_{n-2} = 0$ ទៅជា $(2p+3)^2 a_{2p+3} + a_{2p+1} = 0$

=> $a_{2p+3} = -\frac{a_{2p+1}}{(2p+3)^2} = 0$ (ព្រោះ (α)) ដូច្នេះ

$$a_{2p+1} = 0 \Rightarrow a_{2p+3} = 0$$

បានន័យថា រូបមន្ត (F1) ត្រូវ ។

b/ <u>បង្ហាញថា</u> $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times \ldots \times (2p)^2}, \ \forall p \geq 1$

ចំពោះ p = 1, $a_2 = \frac{(-1)^1}{2^2} = -\frac{1}{4}$, ត្រូវ ដោយ (8)

ដូចនេះយើងសន្មតថា (F2) ត្រូវរហូតដល់ n = 2p ហើយយើងត្រូវបង្ហាញថា (F2) ក៏ត្រូវចំពោះ n = 2p +2 ដែរ ។ ដោយការសន្មតនេះ គេបាន

ចំពោះ n = 2p, $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times ... \times (2p)^2}$ **(β)**

ចំពោះ n = 2p+2, ដោយ (7), $n^2 a_n + a_{n-2} = 0$ ទៅជា $(2p+2)^2 a_{2p+2} + a_{2p} = 0$ =>

a_{2p+2} = - $a_{2p} \times \frac{1}{(2p+2)^2}$ = - $\frac{(-1)^p}{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times ... \times (2p)^2} \times \frac{1}{(2p+2)^2}$ ដោយ (β)

រឺ

$a_{2p+2} = \frac{(-1)^{p+1}}{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times ... \times (2p)^2 \times (2p+2)^2}$ ដែលជារូបមន្ត (F2) ចំពោះ n = 2p + 2

ដូច្នេះ បើ a_{2p} ត្រូវ a_{2p+2} ក៏ត្រូវដែរ ដូច្នេះ រូបមន្ត (F2) ត្រូវ ។

យើងចង់សរសេរ $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times ... \times (2p)^2}$ ឲ្យខ្លី ដោយប្រើ $n!$

Pr = $2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8^2 \times ....\times (2p)^2 = (2.1)^2 \times (2.2)^2 \times (2.3)^2 \times (2.4)^2 \times ... \times (2.p)^2$

Pr = $2^2.1^2 \times 2^2.2^2 \times 2^2.3^2 \times 2^2.4^2 \times 2^2.5^2 \times 2^2.6^2 \times ......\times 2^2.p^2$

$= (2^{2+2+2+\cdots+2})\ (1.2.3.4 ....p)^2$

$= (2^{2p})\ (p!)^2$

ដូច្នេះតួនៃសេរី $a_{2p}t^{2p}$ ទៅជា ៖

$a_{2p}t^{2p} = \frac{(-1)^p}{(2^{2p})\ (p!)^2} t^{2p} = \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \times (\frac{t}{2})^{2p}$

រួមសេចក្តីទៅ ចម្លើយ y(t) នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល **(E1)** គឺ ៖

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} . (\frac{t}{2})^{2n} \qquad \textbf{(F-A)}$$

ដោយ 0 ! = 1 នោះគេអាចសរសេរ រូបមន្ត **(F-A)** ចាប់ពី n ≥ 0 ទៅ ។

អនុគមន៍ ជាចម្លើយនេះ កំនត់លើ R ហៅថា អនុគមន៍ **បេស្សែល សន្ទស្សន៍សូន្យ**

(fonction de Bessel d'indice 0) កត់ដោយ J_0 **:**

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} . [\frac{t}{2}]^{2n}$$

B. ការបកស្រាយដោយ ប្រើបំប្លែងឡាប្លាស

ដើម្បីប្រើបំប្លែងឡាប្លាស គេរកចម្លើយតែក្នុងចន្លោះ]0 ; +∞ [។ ដោយគុណសមីការនឹង U(t) គេបាន៖

$$ty''(t)U(t) + y'(t)U(t) + ty(t)U(t) = 0$$

រឺលើ]0 ; +∞ [ដោយគិតទាំងលក្ខខ័ណ្ឌដើម ៖

$$\begin{cases} t(yU)''(t) + (yU)'(t) + t(yU)(t) = 0 \quad \textbf{(E2)} \\ (yU)(0^+) = y(0) = 1 \;;\; (yU)'(0^+) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

ដោយឧបមាថា តួទាំងអស់នៃសមីការ សុទ្ធតែមានបំប្លែងឡាប្លាស

ដោយតាង $\mathcal{L}[yU](p) = Y(p)$ នោះដោយតារាងរូបភាព n°12 គេបាន

$\mathcal{L}[yU]'(p) = pY(p) - 1$ [ដោយលក្ខខណ្ឌ $(yU)(0^+) = y(0) = 1$] (T1)

$\mathcal{L}[yU]''(p) = p[pY(p) - 1] - y'(0)$ [ដោយប្រើ (T1) រឺ តារាងរូបភាព n°13]

$\mathcal{L}[yU]''(p) = p^2Y(p) - p - 0$ [ដោយលក្ខខ័ណ្ឌ $(yU)'(0^+) = y'(0) = 0$]

ដោយគុណនឹង $-t$: (មើលតារាងរូបភាព n°14)

$$\mathcal{L}[-t(yU)(t)] = \frac{dY}{dp}(p)$$

$\mathcal{L}[-t(yU)''(t)] = \frac{d}{dp}(p^2Y(p) - p) = 2pY(p) + p^2\frac{dY}{dp}(p) - 1$, ដោយប្រើបំប្លែងឡាប្លាស

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល **(E2)** $t(yU)''(t) + (yU)'(t) + t(yU)(t) = 0$, ក្លាយទៅជា :

$$-[2pY(p) + p^2\frac{dY}{dp}(p) - 1] + [pY(p) - 1] - [\frac{dY}{dp}(p)] = 0$$

$$-2pY(p) - p^2\frac{dY}{dp}(p) + 1 + pY(p) - 1 - \frac{dY}{dp}(p) = 0$$

រឺ

$$(p^2+1)\frac{dY}{dp}(p) + pY(p) = 0 \quad \textbf{(E3)}$$

យើងសង្កេតឃើញថា ដោយដាក់បំប្លែងឡាប្លាស លើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល **(E2)** គេនៅតែបានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដដែល គឺ **(E3)**។ តែ (E3)ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលថ្នាក់ទី១ មានអថេរ p ។ យើងអាចបកស្រាយ ៖

$$(p^2+1)Y'(p) + pY(p) = 0$$

$\frac{Y'(p)}{Y(p)} = -\frac{p}{p^2+1}$ => $\int \frac{y'(p)}{y(p)}\,dp = -\int \frac{p}{p^2+1}\,dp$ (ដោយយកអាំងតេក្រាលទាំងសងខាង)

ដោយប្តូរអថេរ យើងតាង $u = p^2 + 1$ => $du = 2pdp$ => $pdp = \frac{du}{2}$

$\int \frac{y'(p)}{y(p)}\,dp = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$ => $\ln Y(p) = \ln(u)^{-\frac{1}{2}} + \ln(C) = \ln\frac{C}{\sqrt{u}} = \ln\frac{C}{\sqrt{p^2+1}}$ =>

$Y(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2+1}}$ (C ជាចំនួនថេរក្នុង R) ។

ចំណោទនៅពេលនេះគឺត្រូវរកតម្លៃ ចំនួនអថេរ C ដោយប្រើល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម នៅមេរៀនបំប្លែងឡាប្លាសភាគ១ (ទំព័រ 45) មានទ្រឹស្តីបទ ៖

> **<u>ទ្រឹស្តីបទ តម្លៃដើម ៖</u>** **(T-XII-B-01)**
>
> បើ អនុគមន៍ f ក្នុង E_0 មាន F ជាបំប្លែងឡាប្លាស នោះមិនត្រឹមតែ
>
> $\lim_{p\to+\infty} F(p) = 0$ ប៉ុណ្ណោះទេ តែថែមទាំង ៖
>
> $$\lim_{p\to+\infty} p\,F(p) = f(0^+)$$

យើងប្រើទ្រឹស្តីបទនេះចំពោះបំប្លែង $Y(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2+1}}$

$$\lim_{p\to+\infty} pY(p) = \lim_{p\to+\infty} C\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = C = y(0^+) = 1$$

ដូច្នេះ $C = 1$ => $Y(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ ហើយដោយប្រើ n°7 ក្នុងតារាងរូភាព គេបាន

$$\boxed{y = J_0 U}$$

ដោយ J_0 ជាអនុគមន៍ បេស្សែលសន្ទស្សន៍សូន្យ ។

<u>C. ការបកស្រាយដោយ ប្រើបំប្លែងឡាប្លាសលើ J_0</u>

នៅក្នុងផ្នែកនេះ គេរកបំប្លែងឡាប្លាស នៃអនុគមន៍សហេតុបេស្សែល សន្ទស្សន៍សូន្យ J_0 កំនត់ដោយ $f(t) = J_0\,U(t)$ ដោយ ៖

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

គេសន្មតទុកជាត្រូវ ទ្រឹស្តីខាងក្រោមនេះ ចំពោះការរកបំប្លែងឡាប្លាសនៃ អនុគមន៍ដែលបំបែកបានជាសេរីគត់ (fonction développable en série entière) :

ទ្រឹស្តីបទ

> គេឲ្យ $f(x) = U(x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ដែលមានកាំរួម $R^{(9)}$ នៃសេរីគត់ ស្មើនឹងអនន្ត ($R = +\infty$) (le rayon de convergence de la série entière est infini) ។
>
> ឧបមាថា កាំរួម R នៃសេរីគត់ $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, a_n x^n$, មិនសូន្យ ($R \neq 0$) ,
>
> នៅពេលនោះ អនុគមន៍ f ជាធាតុមួយនៃ E ហើយចំពោះ $p > 1/R$
>
> គេអាចសរសេរ :
>
> $$\mathcal{L}[f](p) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathcal{L}[U(x)x^n]$$

R កាំរួម [9] (R : rayon de convergence) មើល ឧបសម្ព័ន្ធ-៤ (annexe-4) §1-2- កម្មសិទ្ធិ ។

យើង មើលតើសេរី នៃអនុគមន៍បេស្សែល ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងទ្រឹស្តីបទខាងលើទេ

$J_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}.(\frac{t}{2})^{2n}$

យើងបាន ៖

1/ $u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot (\frac{t}{2})^{2(n+1)}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}.(\frac{t}{2})^{2n}$

ដើម្បី រកកាំរួម R យើងគណនា $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ ៖

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|t|^{2n+2}}{[(n+1)!]^2\ (2)^{2n+2}} \times \frac{n!^2(2)^{2n}}{|t|^{2n}} = \frac{|t|^2}{4(n+1)^2}$ => ដើម្បីរក R

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4(n+1)^2} = 0$ => **R = +∞** (ដូច្នេះល័ក្ខខ័ណ្ឌទី ១ នៃទ្រឹស្តីបទផ្ទៀងផ្ទាត់)

2/ គណនា $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!u_{n+1}}{n!u_n}$

ដោយ តួសេសនៃសេរី អនុគមន៍បេស្សែល $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}.(\frac{t}{2})^{2n}$ មានតម្លៃសូន្យ ដូច្នេះយើងរកលីមីត តែប្រភាគ $\frac{(2n+2)!u_{2n+2}}{(2n)!u_{2n}}$ ដែលជាតួគូគឺ ៖

$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)!u_{2n+2}}{(2n)!u_{2n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)|t|^2}{4(n+1)^2}$ => ដើម្បីរក R

$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{[2n\left(1+\frac{2}{2n}\right)][2n(1+\frac{1}{2n})]}{4[n\left(1+\frac{1}{n}\right)]^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2}{4n^2} = 1$

=> $\boldsymbol{R} = \mathbf{1}$ (ដូច្នេះល័ក្ខខ័ណ្ឌទី ២ នៃទ្រឹស្តីបទផ្ទៀងផ្ទាត់) ។

ហេតុនេះ ទ្រឹស្តីបទខាងលើអាចប្រើបាន ហើយចំពោះ p > 1 គេអាចសរសេរ ៖

$F(p) = \mathcal{L}[J_0U](p) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}.\frac{1}{2^{2n}}\mathcal{L}[t^{2n}U(t)]$ (ដោយលីនេអារីតេនៃបំប្លែងឡាប្លាស)

$F(p) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}.\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{p^{2n+1}}$ (ដោយប្រើ n°3 ក្នុងតារាងរូភាព)

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1.2.3.4.5..........2n}{2^n.2^n(n)!(n)!} = \frac{1.2.3.4.5..........2n}{2^n.(n)!.2^n.(n)!} = \frac{1.2.3.4.5..........2n}{2^n.(1.2.3.4....n).2^n(1.2.3.4.5.....n)} = \frac{1.2.3.4.5..........2n}{[2.4.6.8.....(2n)]^2}$$
$$= \frac{1.3.5.7.....(2n-1)}{2.4.6.8.....(2n)}$$

ដូច្នេះ ៖

$$F(p) = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \times \frac{1.3.5.7.....(2n-1)}{2.4.6.8.....(2n)} \times \frac{1}{p^{2n}} = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \times \frac{1.3.5.7.....(2n-1)}{2.4.6.8.....(2n)} \times \left(\frac{1}{p^2}\right)^n$$

$$\boxed{F(p) = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \times \frac{1.3.5.7.....(2n-1)}{2.4.6.8.....(2n)} \times \left(\frac{1}{p^2}\right)^n} \quad \textbf{(F-C)}$$

F(p) នេះ ជាបំប្លែងឡាប្លាស នៃអនុគមន៍សហេតុបេស្សែល $U(t)J_0(t)$

ហើយនៅ §B យើងក៏បានបំប្លែងឡាប្លាស នៃអនុគមន៍សហេតុបេស្សែល $U(t)J_0(t)$ ដោយ បកស្រាយតាម បំប្លែងនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្សែល ហើយនៅពេលនោះយើងបានបំប្លែង ឡាប្លាស ស្មើនឹង $Y(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ ។ ដូច្នេះបើលទ្ធផលនៃ §B និង §C ស្របគ្នានោះ យើងត្រូវបាន F(p) = Y(p) គឺថា ៖

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \times \frac{1.3.5.7.....(2n-1)}{2.4.6.8.....(2n)} \times \left(\frac{1}{p^2}\right)^n} \quad \textbf{(F-D)}$$

ចំពោះនិស្សិតរូបសាស្ត្រ អាចប្រើរូបមន្ត **(F-D)** ដោយជាទុកជាត្រូវ តែបើចង់

បង្ហាញ ដូចមានតទៅនេះ ៖

យើងសង្កេតថា $\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = (1+p^2)^{-\frac{1}{2}}$

ដូច្នេះដើម្បីបាន សេរីគត់ (série entière)ដូច **(F-D)** យើងតាង

$\mathbf{y} = (\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{m}}$ $(m \in Q)$

ហើយយើងថា y អាចបំបែកជាសេរីគត់បាន (y est développable en série entière) គឺ ថា

$\boldsymbol{y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \boldsymbol{a_n x^n}$ ។

ដើម្បី $(1+x)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ យើង យក y(0) = 1 (ព្រោះ y = $(1+x)^m$ => $y(0) = 1$),

ដូច្នេះ $a_0 = 1$ ។

y = $(1+x)^m$
y' = $m(1+x)^{m-1}$
(1+x)y' = (1+x). $m(1+x)^{m-1}$
$(1+x)y' = m(1+x)^m = my$

ដូច្នេះ y ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$\begin{cases} (1+x)y' = my & \textbf{(1)} \\ y(0) = 1 \text{ រឺ } a_0 = 1 \end{cases}$$

ដើម្បី រក y យើងត្រូវរក មេគុណ a_n ដោយ n = 0, 1, 3, …… +∞

យើងសរសេរ (1) ដោយថា ពហុធាពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែតួដែលមានដឺក្រេស្មើគ្នានោះ ក៏មានមេគុណស្មើគ្នាដែរ ។

$(1+x)y' = (1+x)(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)'$

$= (1+x)\,[\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}]$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$

$= \sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1} + n a_n]\, x^n$

$$my = \sum_{n=0}^{+\infty} m a_n x^n$$

ដោយ **(1)** យើងបាន៖

$\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1}+na_n]\,x^n \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} ma_nx^n \quad =>$

$(n+1)a_{n+1}+na_n \;=\; ma_n \quad => \quad a_{n+1}=\frac{(m-n)}{n+1}.a_n$

ដូច្នេះយើងបានសម្ព័ន្ធកំណើន (relation de récurrence)៖

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{(m-n)}{n+1}.a_n & \text{ចំពោះ } n\geq 0 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

ចំពោះ n = 0, $a_1 = \frac{m}{1}.\,a_0 \;=>\quad a_1 = \frac{m}{1}$

ចំពោះ n = 1, $a_2 = \frac{m-1}{2}.\,a_1 \;=>\quad a_2 = \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}$

ចំពោះ n = 2, $a_3 = \frac{m-2}{3}.\,a_2 \;=>\quad a_3 = \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$

…………………………………………………………………..

ចំពោះ n = n-1, $a_n = \frac{m-(n-1)}{n}.\,a_{n-1} \;=>\quad a_n = \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\ldots\ldots\frac{m-n+1}{n}$

ឬ

$$a_n = \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots\ldots\ldots(m-n+1)}{n!} \qquad \textbf{(F-D-1)}$$

ដូច្នេះ ការបំបែកដែលយើងរកគឺ ៖

$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1}.x+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.x^2+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.x^3+..+\frac{m.(m-1).(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{n!}.x^n+\ldots.$

ហើយស៊េរីនេះរួម កាលណា $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}.x^{n+1}}{a_n.x^n}\right| < 1$ ឬ $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|x| < 1$ **(2)**

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots\ldots(m-n)}{(n+1)!}\times\frac{n!}{m.(m-1).(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)} = \frac{m-n}{n+1} \;=>\; \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

⇨ ដោយ **(2)** $|x| < 1$:

រួមសេចក្តីទៅ កាលណា $|x| < 1$ ឬ **-1** $< x < 1$ គេបានរូបមន្ត **(F-E)** ៖

$$\boldsymbol{(1+x)^m = 1+\frac{m}{1}.x+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.x^2+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.x^3+..+\frac{m.(m-1).(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{n!}.x^n+\ldots.}$$

/ ដោយ $m\in Q$ និង $|x| < 1$ ។

<u>ចំពោះ $m\in N$</u> (ចំនួនគត់) គេអាចសរសេរ ៖

$$a_n = \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots\ldots.(m-n+1)}{n!} \times \frac{(m-n).(m-n-1)\ldots\ldots.2.1}{(m-n).(m-n-1)\ldots\ldots.2.1} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = C(m;n)$$

$$\boxed{(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} C(m;n)\, x^n}$$

(F-E-1) ដែលជារូបមន្ត ប៊ីណូមកំនត់ត្រឹម ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m (formule du binôme ; le développement est limité à l'ordre m)

ឧទាហរណ៍

$$(1+x)^3 = C(3\,;0)x^0 + C(3\,;1)x^1 + C(3\,;2)x^2 + C(3\,;3)x^3$$

$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$ ។

C-1. អនុវត្តន៍

ដោយយក u មកជំនួស x ក្នុងរូបមន្ត **(F-E)** គេបាន $(\mathbf{1}+\boldsymbol{u})^{\boldsymbol{m}}$ ហើយគេបាន ការបំបែក ដូចជា៖

ឧទាហរណ៍-a

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1}(x^2)^1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1}.\frac{(\frac{-1}{2}-1)}{2}(x^2)^2 + \frac{-\frac{1}{2}}{1}.\frac{(\frac{-1}{2}-1)}{2}.\frac{(\frac{-1}{2}-2)}{3}.(x^2)^3 + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)\left(\frac{-1}{2}-2\right)\left(\frac{-1}{2}-3\right)\ldots\ldots\left(\frac{-1}{2}-n+1\right)}{n!}(x^2)^n + \ldots\ldots..$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{1}{1}(\frac{-1}{2})x^2 + \frac{1}{2!}.(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})x^4 + \frac{1}{3!}.(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})(\frac{-5}{2})x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots. +$$
$$\ldots\ldots. + \frac{1}{n!}.(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})(\frac{-5}{2})..(\frac{-(2n-1)}{2})(x^2)^n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1.3.5\ldots\ldots.(2n-1)x^{2n}$$

ដោយ $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots.(n-1)(n)$

$2^n = 2\times\ 2\times\ 2\times\ 2\times \ldots\ldots\ldots..2\ \times 2$

ដូច្នេះ

$n!\,2^n = 2\times 4\times 6\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2(\mathrm{n}-1)(2\mathrm{n})$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1.3.5\ldots\ldots.(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\ldots2n}[(x)^2]^n}$$

(D1), ដោយ -1 < x < 1

បើសរសេរពេញ ៖

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+$.........

ឧទាហរណ៍-b : បំបែក $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (រឺ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

មុននឹងគណនាការបំបែកនេះ យើងគួរធ្វើការសង្កេតខ្លះ ៖

1/ ដើមឡើយយើងរកការបំបែករបស់ $(1+x)^m$ ដោយ $m \in Q$ ហើយយើងឃើញថាបើ

$-1 < x < 1$ នោះ $(1+x)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ដោយ

$a_n = \frac{m.(m-1).(m-2).........(m-n+1)}{n!}$ **(1)** (មើល (F-D-1))

ដោយ x ជាអថេរ នោះគេអាចជំនួស x ដោយ u បាន ហើយរូបមន្តទៅជា៖

$(1+u)^m = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + \cdots + a_nu^n +$ .... (ដោយ $a_0 = 1$)

2/ យើងមើលមេគុណ a_n **(1)** វាជាប្រភាគ ហើយភាគយក មានប៉ុន្មានកត្តា? ចាប់តាំង ពី (m – 0)(m-1)(m-2)…..[m- (n-1)] យើងឆ្លើយថាវាមាន n កត្តា ព្រោះពី 0, 1, 2, ….(n-1) ។

3/ ដោយ m នៅក្នុង $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ស្មើនឹង $-\frac{1}{2}$ ($m = -\frac{1}{2}$) នោះកត្តានីមួយៗនៃ ភាគយក របស់ a_n សុទ្ធតែជាចំនួន អវិជ្ជមាន ហេតុនេះហើយបានជាក្នុងរូបមន្ត **(D1)** ខាងលើ មានគុណនឹង $(-1)^n$ ដែលជាសញ្ញាលេខសង របស់ (m – 0)(m-1)(m-2)…..[m-(n-1)] ។

4/ យើងសង្កេតឃើញថា ការបំបែកនៃ $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ និង $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ដែលយើងមាន លទ្ធផលរួចមកហើយ ខុសគ្នាតែត្រង់ $u = -x^2$ ចំពោះ $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ និង $u = x^2$ ចំពោះ $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ពីព្រោះ $m = -\frac{1}{2}$ ដូចគ្នា ។ ដូច្នេះតើយើងអាចទាញយកលទ្ធផល ពី $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ បានឬទេ ចំពោះ ការបំបែក $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$? ឆ្លើយថាបាន ព្រោះ $m = -\frac{1}{2}$ ដូចគ្នា ដូច្នេះ មេគុណ a_n ក៏ដូចគ្នាដែរ (មើល **(1)**) ។ ហើយបើយើងមើល ៖

$(1+u)^m = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + \cdots + a_nu^n +$ .... (ដោយ $a_0 = 1$)

បើយើងជំនួស u ដោយ $-x^2$ [u= (-x^2)][4] យើងបាន៖

$$[1+(-x^2)]^m = a_0 + a_1(-x^2) + a_2[(-x^2)]^2 + a_3[(-x^2)]^3 + \cdots + a_n[(-x^2)]^n + \ldots\ldots$$

$$(1-x^2)^m = 1 - a_1x^2 + a_2x^4 - a_3x^6 + \ldots + (-1)^n a_n\, x^{2n} + \ldots..$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \left[(-1)^n \frac{1.3.5\ldots\ldots.(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\ldots 2n} x^{2n}\right]$$ (ដោយ (D1))

រឺ

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5\ldots\ldots.(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\ldots 2n} x^{2n}$$

(ព្រោះ$(-1)^n(-1)^n = (-1)^{2n} = [(-1)^2]^n = 1^n = 1$)

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5\ldots\ldots.(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\ldots 2n} x^{2n}}$$ **(D2)**, ដោយ -1 < x < 1

C-1. ការបកស្រាយដោយ ប្រើបំប្លែងឡាប្លាសលើ J_0 (ត)

ឥឡូវនេះ យើងត្រឡប់មកការបកស្រាយបំប្លែងឡាប្លាស នៃផ្នែក §C តទៅទៀត គឺយើងត្រូវ បង្ហាញ រូបមន្ត ៖

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \times \frac{1.3.5.7\ldots..(2n-1)}{2.4.6.8\ldots..(2n)} \times \left(\frac{1}{p^2}\right)^n$$ **(1)** (មើល (F-D))

ដើម្បី បង្ហាញថា **(1)** ត្រូវ យើងគណនា អង្គទី២ គឺ ៖

$\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \times \frac{1.3.5.7\ldots..(2n-1)}{2.4.6.8\ldots..(2n)} \times \left(\frac{1}{p^2}\right)^n$ ។ ដោយប្រើ រូបមន្ត **(D1)**

យើងអាចសរសេរ ៖

$$\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \times \frac{1.3.5.7\ldots..(2n-1)}{2.4.6.8\ldots..(2n)} \times \left(\frac{1}{p^2}\right)^n = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}}\right]$$

(ព្រោះ $\left|\frac{1}{p}\right| < 1$) ⇔ $\frac{1}{|p|} < 1$ => $|p| > 1$ រឺ $p > 1$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

[4] ទុកជាជំនួស u ដោយ $-x^2$ ក៏ដោយ សេរី នៅតែសេរីគត់ (série entière) ដដែល ។ ហើយម្យ៉ាងទៀត x^2 ក៏ជាតួណាមួយនៃ សេរីដើម $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ដែរ ។ ដូច្នេះបើ សេរីដើម $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ រួម នោះ សេរីដកស្រង់ (série extraite) ពីសេរីដើម ដូចជា $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ ក៏ជាសេរីរួមដែរ ។

ដូច្នេះ ៖

$\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \times \frac{1.3.5.7\ldots..(2n-1)}{2.4.6.8\ldots..(2n)} \times (\frac{1}{p^2})^n \quad = \frac{1}{p}[\frac{1}{\sqrt{\frac{p^2+1}{p^2}}}] = \frac{1}{p}[\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}]$

$= \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ => រូបមន្ត (1) ត្រឹមត្រូវ ។

ដូច្នេះ រូបមន្ត **(F-D)** ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។