F. ការបំប្លែង ដេរីវេ (Transformée d'une dérivée) .

គេឲ្យ f អនុគមន៍ ក្នុង E_0 , ដូច្នេះ $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ មាននៅក្នុង C ; យើងតាង

$f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$. ចំពោះ $p > \sigma(f)$, យើងមាន $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$.

ឧបមា f នៅក្នុងថ្នាក់ C^1 ក្នុងចន្លោះ] 0 ; +∞ [ដូច្នេះ ដេរីវេ f' ជាប់ ក្នុងចន្លោះ]0 ; +∞[

ៗ ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$u = e^{-pt}$ => $du = -pe^{-pt}dt$

$dv = f'(t)dt$ => $v = f(t)$

គេបាន៖

$$\int_\varepsilon^A f'(t)e^{-pt}dt = \left|e^{-pt}f(t)\right|_0^{+A} - \int_0^A f(t)\left(-pe^{-pt}\right)dt$$

$$= \left|e^{-pt}f(t)\right|_0^{+A} + p\int_0^A f(t)e^{-pt}dt$$

ដោយសន្មត់ថា $p > \sigma(f)$ ហើយដោយធ្វើ លីមីត $A \to +\infty$ ហើយ កាលណា $\varepsilon \to 0$

គេបាន ([1])

$$\int_0^{+\infty}\int_\varepsilon^A f'(t)e^{-pt}\,dt = p\,\mathcal{L}[f](p) - f(0^+)$$

ជាទូទៅ គេបង្ហាញ តែយើងសន្មត់ បើ អនុគមន៍ ជាប់ ([2]) ក្នុងចន្លោះ] 0 ; +∞ [

(ដូច្នេះ គ្មានសម្មតិកម្ម លើ ដេរីវេ f' ជាប់ទេ) ហើយនៅក្នុង E_0 នោះបំប្លែងឡាប្លាស

នៃ f' ផ្ទៀងផ្ទាត់ នឹង៖

$$\mathcal{L}[f'](p) = p\,\mathcal{L}[f](p) - f(0^+) \qquad \textbf{(F-3-F-01)}$$

រឺ

$$\text{បើ } f(t) \supset F(p) \quad \text{នោះ៖ } f'(t) \supset pF(p) - f(0^+) \qquad \textbf{(F-3-F-02)}$$

---

[1] : $\lim_{A\to+\infty}|f(A)|\,e^{-pt} = 0$ ចំពោះ $p > \sigma(f)$ ហើយយ៉ាងនេះចំពោះគ្រប់អនុគមន៍នៃ E_0

[2] សម្មតិកម្ម លើ f ជាប់ក្នុងចន្លោះ] 0 ; +∞ [ជាចាំបាច់ (ដូចឧទាហរណ៍ ទី-3 ខាងមុខ)

បើ *f'* ក៏ជាប់ដែរ ក្នុង ចន្លោះ] 0 ; +∞ [គេនឹងបាន (ដោយប្រើ **(F-3-F-02)**)

$f'(t) \supset pF(p) - f(0^+)$ => $f''(t) \supset p[pF(p) - f(0^+)] - f'(0^+)$

រឺ

បើ $f(t) \supset F(p)$ នោះ $f''(t) \supset p^2F(p) - p\,f(0^+) - f'(0^+)$	**(F-3-F-03)**

<u>ឧទាហរណ៍-1</u>

បើ f(t) = $(\cos(\omega t))U(t)$ នោះ f′(t) = $-\omega(\sin(\omega t)U(t) + (\cos(\omega t)U'(t)$ តែដោយ

U′(t) = 0 លើចន្លោះ] 0 ; +∞ [យើងបាន : f′(t) = $-\omega(\sin(\omega t))U(t)$ **(1)**

លើចន្លោះ] 0 ; +∞ [។ យើងអាចសង្កេតឃើញថា ដេរីវេត្រង់ សូន្យ អត់មាន ។

- <u>គណនា តែម្តងបំប្លែងឡាប្លាស នៃ *f'*</u>

យើងបានចំពោះ p > 0 :

$$(\cos(\omega t))U(t) \supset \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$(\sin(\omega t))U(t) \supset \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

ដូច្នេះ ដោយ (1) f′(t) $\supset -\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ **(2)**

- <u>ការពិនិត្យបញ្ជាក់ រូបមន្ត</u> (F-3-F-02)

រូបមន្ត F-3-F-02 អោយ៖ $f'(t) \supset pF(p) - f(0^+)$

ដោយ f(t) = $(\cos(\omega t))U(t)$ => $f(0^+) = 1$ ដូច្នេះ

$$pF(p) - f(0^+) = p\frac{p}{p^2+\omega^2} - 1 = \frac{p^2-(p^2+\omega^2)}{p^2+\omega^2} = -\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$ (ដែលដូច (2))

ដូច្នេះ :

$$\mathcal{L}[f'](p) = p\,\mathcal{L}[f](p) - f(0^+)$$

បានន័យថា រូបមន្ត (F-3-F-02) ត្រឹមត្រូវ ហើយយើងអាចប្រើ ដើម្បីរកបំប្លែងឡាប្លាស នៃដេរីវេ f' ដោយពុំចាំបាច់ដឹងជាមុននូវ f' ។