B. គណនា អាំងតេក្រាល : $\int_0^{+\infty} t\, e^{rt} e^{-pt} dt$

យើងតាង f អនុគមន៍ $t \to f(t) = U(t)te^{rt}$ ។ ចំពោះ $A > 0$ និង $p \neq r$ យើងបាន៖

$$\int_0^A f(t)\, e^{-pt} dt = \int_0^A t e^{(r-p)t}\, dt$$

អាំងតេក្រាលដោយផ្នែកអោយ៖

$$u = t \Rightarrow du = dt$$

$$dv = e^{(r-p)t} dt \Rightarrow v = \frac{1}{(r-p)} e^{(r-p)t}$$

$$\int_0^A t e^{(r-p)t}\, dt = \left| u \frac{1}{(r-p)} e^{(r-p)u} \right|_0^{+A} - \int_0^A \frac{1}{(r-p)} e^{(r-p)u} du$$

$$= \frac{A}{(r-p)} e^{(r-p)A} - \frac{1}{(r-p)} \int_0^A e^{(r-p)u} du$$

$$= \frac{A}{(r-p)} e^{(r-p)A} - \frac{1}{(r-p)^2} [e^{(r-p)A} - 1] \quad \textbf{(2)}$$

យើងសិក្សាដូចកាលនៅក្នុងកថាខណ្ឌ A ដែរ គឺថា<u>ការរួមតែមួយអាប់សូលុយ</u> បណ្តាលឲ្យមាន<u>ការរួមតែមួយ</u>ដែរ (តែផ្ទុយមកវិញ មិនបានទេ) ។

ព្រោះហេតុអ្វី ? ព្រោះថា ចំពោះអនុគមន៍ $f(x) \leq |f(x)|\ \forall x \in R$

ដូច្នេះ បើ $\lim_{x \to +\infty} |f(x)|$ មាន, នោះ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ក៏រិតតែមានទៅទៀតហើយ ។

ឧបមា $\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = M \Rightarrow -M \leq \lim_{x \to +\infty} f(x) \leq M$

បើ $M = 0$ យើងបាន $-0 \leq \lim_{x \to +\infty} f(x) \leq 0$ គឺថា $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ។

ដោយ ការនេះសំខាន់ ខ្ញុំសូមបង្ហាញម្តងទៀត ក្នុងការរក លីមីត (2) កាលណា $A \to +\infty$ យើងដឹងហើយថាចំពោះអនុគមន៍ អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល e^x

$\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ និង $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ (ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ =>

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x}}=0$

ដូច្នេះ តើ $\lim_{t\to+\infty} e^{at}$ ស្មើនឹងអ្វី ?

ដើម្បីកុំឲ្យគេចាប់ថ្នាក់យើងបាន ត្រូវឆ្លើយថា

- -បើ $a > 0$, $\lim_{t\to+\infty} e^{at} = +\infty$
- -បើ $a = 0$, $at = 0$ ដូច្នេះ $e^{at} = e^{0} = 1$ **(F-2-B- 01)**
- -បើ $a < 0$, $\lim_{t\to+\infty} e^{at} = 0$

យើងឃើញថាក្នុង(2) ត្រូវរក $\lim_{A\to+\infty} e^{(r-p)A}$ ហើយដោយ (F-2-B- 01) ដើម្បីរក

លីមីត ទាល់តែយើងដឹង ថាតើ $(r-p)$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ឬអវិជ្ជមាន

ដោយ $r \in C$, $p \in R$, $A > 0$ នោះយើងអាចតាង $r = b + i.c$

$r - p = (b + i.c) - p = (b - p) + i.c$

ហើយដោយដឹងថាលីមីត អាប់សូលុយ ធំជាងលីមីតធម្មតា នោះគេក៏រកលីមីត

អាប់សូលុយ របស់អនុគមន៍ $e^{(r-p)A}$ ព្រោះងាយរកជាង។

ដូច្នេះ $\left|e^{(r-p)A}\right| = \left|e^{[(b-p)+i.c]A}\right| = \left|e^{(b-p)A}\right|\left|e^{i.cA}\right|$ **(3)**

ដោយ $e^{ix} = \cos x + i.\sin x$ ដូច្នេះ $\left|e^{ix}\right| = \sqrt{(\cos x)^2 + (\sin x)^2} = 1, \forall x \in R$

ដោយ $\left|e^{ix}\right| = 1 \ \forall x \in R$ ដូច្នេះ $\left|e^{i.cA}\right| = 1$

ដូច្នេះចំពោះ (3)

$$\lim_{A\to+\infty}\left|e^{(r-p)A}\right| = \lim_{A\to+\infty}\left|e^{(b-p)A}\right| \quad \textbf{(4)}$$

ដោយ $r\in C,\ p \in R$

បើ $(b-p) > 0$, $\lim_{A\to+\infty}\left|e^{(b-p)A}\right| = +\infty$

បើ $(b-p) < 0$, $\lim_{A\to+\infty}\left|e^{(b-p)A}\right| = 0$ => $\mathbf{\lim_{A\to+\infty}\left|e^{(r-p)A}\right| = 0}$ ដោយ (4)

$(b-p) < 0 \quad <=> \quad b < p \quad <=> Re(r) < p$

បានន័យថាលីមីតមាន ទាល់តែ ផ្នែកចំនួនពិតនៃកំផ្លិច r តូច ជាង p

លក្ខខណ្ឌនេះ ហៅថា « **លក្ខខ័ណរួមតែមួយអាប់សូលុយ** » គឺ

p > Re(r) គឺ ចំនួនពិត p ធំជាង ផ្នែកចំនួនពិតនៃកំផ្លិច r

(Cond-2-B-01)

ដូច្នេះ បើលក្ខខណ្ឌនេះបំពេញ, $\lim_{A\to+\infty} e^{(r-p)A} = 0$ និង $\lim_{A\to+\infty} Ae^{(r-p)A} = 0$

ដោយ (2) ៖

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A te^{(r-p)t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{A}{(r-p)} e^{(r-p)A} \right] - \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{(r-p)^2} [e^{(r-p)A} - 1] \right)$$

$$= \frac{1}{(r-p)^2}$$

ដូច្នេះ

បើ p > Re (r), $\int_0^A te^{(r-p)t}\,dt = \frac{1}{(r-p)^2}$